Plaquette 4 – Raisonner et démontrer en arithmétique

Arithmétique — Troisième

Exercices

Méthode

On passe du calcul à la **démonstration** : montrer qu'un nombre est toujours pair, qu'une somme est divisible par 3, qu'un nombre n'est pas un carré parfait, qu'une propriété est fausse en donnant un **contre-exemple**. L'outil central est l'écriture littérale d'un entier.

Exercice 1 – La somme de deux impairs

Démontrer que la somme de deux nombres impairs est toujours paire.

Exercice 2 – Produit de deux entiers consécutifs

Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

Exercice 3 – Somme de trois entiers consécutifs

Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3. Est-ce vrai pour quatre entiers consécutifs ?

Exercice 4 – Chercher un contre-exemple

Ces affirmations sont fausses. Donner un contre-exemple pour chacune.

a) Tout nombre impair est premier.

b) Si un nombre est divisible par 2 et par 4, alors il est divisible par 8.

c) Le produit de deux nombres non premiers n'est jamais un carré parfait.

d) Si $\text{PGCD}(a\,;b) = 1$, alors a ou b est premier.

Exercice 5 – Reconnaître un carré parfait

Les nombres 1764 et 2700 sont-ils des carrés parfaits ? Si non, par quel plus petit entier faut-il les multiplier pour en obtenir un ?

Exercice 6 – Divisibilité par 3 d'une expression

Démontrer que $n^3 - n$ est toujours divisible par 6, pour tout entier n.

Exercice 7 – Chiffre des unités

Déterminer le chiffre des unités de 7^{2026}, puis celui de 3^{100}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Divisibilité par 9 et somme des chiffres

Le nombre $\overline{4a7}$ (à trois chiffres, avec a le chiffre des dizaines) est divisible par 9. Déterminer a. Même question pour une divisibilité par 3.

Exercice 9 – Deux nombres, leur PGCD imposé

Trouver tous les couples d'entiers $(a\,;b)$ avec $a < b$, tels que $a + b = 60$ et $\text{PGCD}(a\,;b) = 12$.

Exercice 10 – Un nombre premier particulier

Démontrer que si p est un nombre premier supérieur à 3, alors p s'écrit $6k + 1$ ou $6k + 5$.

Exercice 11 – Compter les diviseurs

Combien de diviseurs ont 48, 100 et 210 ? Lequel en a le plus ? Un nombre peut-il avoir un nombre impair de diviseurs ?

Exercice 12 – Fraction toujours irréductible

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, la fraction $\dfrac{n}{n+1}$ est irréductible.

Exercice 13 – Un nombre à deux chiffres et son renversé

Un nombre à deux chiffres s'écrit $\overline{ab}$. On lui soustrait le nombre renversé $\overline{ba}$. Démontrer que le résultat est toujours un multiple de 9.

Exercice 14 – Vrai ou faux avec justification

Dire si chaque affirmation est vraie, en démontrant ou en donnant un contre-exemple.

a) Si un nombre est divisible par 6, alors il est divisible par 3.

b) Si un nombre est divisible par 3 et par 4, alors il est divisible par 12.

c) Si un nombre est divisible par 3 et par 6, alors il est divisible par 18.

d) Le carré d'un nombre impair est impair.

Exercice 15 – Nombres premiers jumeaux

Deux nombres premiers qui diffèrent de 2 sont dits **jumeaux**. Donner tous les couples inférieurs à 60. Pourquoi $(2\,;4)$ n'en est-il pas un ?

Exercice 16 – Synthèse : démonstrations enchaînées

Soit n un entier.

a) Démontrer que $n^2 + 3n$ est toujours pair.

b) Démontrer que $n(n+1)(2n+1)$ est toujours divisible par 6.

c) Le nombre $n^2 + n + 1$ peut-il être pair ?

d) Démontrer que $\dfrac{2n+1}{2n+3}$ est irréductible pour tout $n \geq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).