

Plaquette 4 – Démontrer avec le calcul littéral

Calcul littéral et identités remarquables – Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Traduire un programme de calcul. Chaque instruction devient une opération sur x .

Instruction	Écriture
choisir un nombre	x
ajouter 5	$x + 5$
multiplier par 3	$3x$ ou $3(x + 5)$ selon l'étape
élever au carré	x^2 ou $(x + 5)^2$
soustraire le nombre de départ	$\dots - x$
prendre le double	$2(\dots)$

Attention aux parenthèses. « Ajouter 5 puis multiplier par 3 » donne $3(x + 5)$, alors que « multiplier par 3 puis ajouter 5 » donne $3x + 5$. Ce n'est pas la même chose.

Prouver une propriété des nombres. On écrit l'entier avec une lettre, on développe, on factorise pour faire apparaître la conclusion.

On veut montrer que...	On fait apparaître
c'est pair	un facteur 2
c'est multiple de 3	un facteur 3
c'est un carré parfait	une forme $(\dots)^2$
c'est positif	une somme de carrés, ou un carré

Un carré est toujours positif ou nul. C'est l'argument de base pour prouver qu'une expression est positive :

$$x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 \geq 1 > 0$$

Montrer que deux expressions sont égales. On développe les deux membres séparément et on compare les formes réduites. Un ou deux exemples numériques **ne démontrent rien**.

Montrer qu'une égalité est fausse. Un seul **contre-exemple** suffit : une valeur de x pour laquelle les deux membres diffèrent.

Rédaction attendue. « Soit x un nombre quelconque... » puis le calcul, puis « donc, pour tout x , ... ». La conclusion doit répondre à la question posée.

Correction de l'exercice 1 – Un programme de calcul

a) **Départ à 4** ✓

— **Ajouter 6** : 10 ✓

— **Multiplier par 4** : 40 ✓

— **Ajouter 9** :

- **Départ à -2** ✓
- **Ajouter $6 : 4$** ✓
- **Multiplier par $-2 : -8$** ✓
- **Ajouter 9** :

1

- **Observation** : $49 = 7^2$ et $1 = 1^2$ ✓

b) **Traduction littérale** : $x(x + 6) + 9$ ✓

- **Développement** : $x^2 + 6x + 9$ ✓
- **Test du carré parfait** : $9 = 3^2$ ✓
- **Double produit** : $2 \times x \times 3 = 6x$ ✓
- **Correspondance** : c'est bien le terme du milieu ✓
- **Factorisation** :

$$x(x + 6) + 9 = (x + 3)^2$$

- **Conclusion** : le résultat est le carré de $x + 3$ ✓
- **Contrôle pour $x = 4$** : $(4 + 3)^2 = 49$ ✓
- **Contrôle pour $x = -2$** : $(-2 + 3)^2 = 1$ ✓
- **Cohérence** : les valeurs de a) sont retrouvées ✓
- **Précision importante** : c'est un carré parfait **si x est entier** ✓
- **Contrôle avec $x = 0,5$** : $(3,5)^2 = 12,25$, un carré mais pas d'entier ✓
- **Valeur minimale du résultat** : 0, atteinte pour $x = -3$ ✓
- **Contrôle** : $-3 \times 3 + 9 = -9 + 9 = 0$ ✓
- **Conséquence** : le résultat n'est **jamais négatif** ✓

Réponse. a) 49 et 1 · b) le résultat vaut $(x + 3)^2$, toujours un carré.

Correction de l'exercice 2 - Deux programmes équivalents

- **Traduction du programme A** : $(2x + 3)^2$ ✓
- **Développement** : $(2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 9$ ✓
- **Résultat** :

$$A = 4x^2 + 12x + 9$$

- **Traduction du programme B** : $4x^2 + 12x + 9$ ✓
- **Comparaison** : les deux formes réduites sont **identiques** ✓
- **Conclusion** : les programmes sont **équivalents** ✓
- **Contrôle pour $x = 1$** : A donne $5^2 = 25$ ✓
- **Programme B** : $4 + 12 + 9 = 25$ ✓
- **Contrôle pour $x = 0$** : $3^2 = 9$ et 9 ✓
- **Contrôle pour $x = -1$** : $(-2 + 3)^2 = 1$ ✓
- **Programme B** : $4 - 12 + 9 = 1$ ✓
- **Contrôle pour $x = 10$** : $23^2 = 529$ ✓
- **Programme B** : $400 + 120 + 9 = 529$ ✓
- **Cohérence** : les quatre contrôles concordent ✓
- **Point de méthode essentiel** : ces contrôles **illustrent** mais ne démontrent pas ✓
- **Seule preuve valable** : le développement littéral fait plus haut ✓

- **Programme C, pour comparer** : doubler, élever au carré, ajouter 3 ✓
- **Traduction** : $4x^2 + 3$ ✓
- **Verdict** : **non** équivalent, l'ordre des opérations ayant changé ✓

Réponse. Oui : les deux valent $4x^2 + 12x + 9$.

Correction de l'exercice 3 - Somme de deux nombres pairs consécutifs

- **Écriture d'un nombre pair** : $2n$ avec n entier ✓
- **Pair consécutif suivant** : $2n + 2$ ✓
- **Attention** : ce n'est pas $2n + 1$, qui serait impair ✓
- **Somme** : $2n + (2n + 2)$ ✓
- **Réduction** : $4n + 2$ ✓
- **Factorisation partielle** :

$$4n + 2 = 2(2n + 1)$$
- **Analyse** : la somme est le double d'un nombre **impair** ✓
- **Conséquence** : elle contient exactement **un** facteur 2 ✓
- **Conclusion** : elle n'est **pas** divisible par 4 ✓
- **Rédaction alternative** : $4n + 2 = 4n + 2$, le reste dans la division par 4 vaut 2 ✓
- **Contrôle avec 6 et 8** : $14 = 4 \times 3 + 2$ ✓
- **Vérification** : $14 \div 4 = 3,5$, non entier ✓
- **Contrôle avec 10 et 12** : $22 = 4 \times 5 + 2$ ✓
- **Contrôle avec 0 et 2** : 2, non multiple de 4 ✓
- **Propriété voisine** : la somme de deux **impairs** consécutifs vaut $4n + 4 = 4(n + 1)$ ✓
- **Conclusion** : celle-ci **est** multiple de 4 ✓
- **Contrôle** : $7 + 9 = 16 = 4 \times 4$ ✓
- **Contraste éclairant** : les deux situations se ressemblent mais donnent des conclusions opposées ✓

Réponse. La somme vaut $4n + 2 = 2(2n + 1)$: elle laisse toujours un reste de 2 dans la division par 4.

Correction de l'exercice 4 - Expression toujours positive

- **Méthode** : faire apparaître un carré ✓
- **Début de carré** : $x^2 - 8x$ ressemble au début de $(x - 4)^2$ ✓
- **Développement de $(x - 4)^2$** : $x^2 - 8x + 16$ ✓
- **Ajustement** : il faut 20, donc on ajoute 4 ✓
- **Réécriture** :

$$x^2 - 8x + 20 = (x - 4)^2 + 4$$
- **Contrôle par développement** : $x^2 - 8x + 16 + 4 = x^2 - 8x + 20$ ✓
- **Argument clé** : un carré est **toujours positif ou nul** ✓
- **Donc** : $(x - 4)^2 \geq 0$ ✓
- **Conséquence** : $(x - 4)^2 + 4 \geq 4$ ✓
- **Conclusion** : l'expression est toujours ≥ 4 , donc **strictement positive** ✓
- **Valeur minimale** :

4

- **Valeur de x qui la réalise** : $x = 4$, quand le carré s'annule ✓

- **Contrôle en** $x = 4$: $16 - 32 + 20 = 4$ ✓
- **Contrôle en** $x = 0$: $20 \geq 4$ ✓
- **Contrôle en** $x = 3$: $9 - 24 + 20 = 5$ ✓
- **Contrôle en** $x = 5$: $25 - 40 + 20 = 5$ ✓
- **Observation** : la symétrie autour de $x = 4$ ✓
- **Conséquence** : l'expression ne s'annule jamais ✓
- **Vérification** : $x^2 - 8x + 20 = 0$ n'a aucune solution ✓

Réponse. $x^2 - 8x + 20 = (x - 4)^2 + 4 \geq 4$: le minimum vaut 4, atteint en $x = 4$.

Correction de l'exercice 5 - Carré d'un nombre finissant par 5

- **Écriture du nombre** : $10n + 5$ ✓
- **Exemples** : $n = 3$ donne 35, $n = 7$ donne 75 ✓
- **Carré** : $(10n + 5)^2$ ✓
- **Développement** : $100n^2 + 2 \times 10n \times 5 + 25$ ✓
- **Réduction** : $100n^2 + 100n + 25$ ✓
- **Factorisation partielle** :

$$(10n + 5)^2 = 100n(n + 1) + 25$$
- **Analyse** : le premier terme est un multiple de 100 ✓
- **Conséquence** : ses deux derniers chiffres sont 00 ✓
- **Conclusion** : le carré se termine par 25 ✓
- **Règle de calcul mental** : on calcule $n(n + 1)$ et on écrit 25 à la suite ✓
- **Contrôle pour 35** : $n = 3$, donc $3 \times 4 = 12$ ✓
- **Résultat** : 1225 ✓
- **Vérification** : $35^2 = 1225$ ✓
- **Contrôle pour 75** : $n = 7$, donc $7 \times 8 = 56$ ✓
- **Résultat** : 5625 ✓
- **Contrôle pour 95** : $9 \times 10 = 90$, donc 9025 ✓
- **Vérification** : $95^2 = 9025$ ✓
- **Contrôle pour 115** : $11 \times 12 = 132$, donc 13 225 ✓
- **Vérification** : $115^2 = 13 225$ ✓

Réponse. $(10n + 5)^2 = 100n(n + 1) + 25$: le carré finit par 25, précédé de $n(n + 1)$.

Correction de l'exercice 6 - Produit d'entiers consécutifs et carrés

- **Expression à étudier** : $n(n + 1) + (n + 1)$ ✓
- **Facteur commun** : $(n + 1)$ ✓
- **Mise en facteur** : $(n + 1)(n + 1)$ ✓
- **Résultat** :

$$n(n + 1) + (n + 1) = (n + 1)^2$$
- **Conclusion** : c'est bien un **carré parfait** ✓
- **Contrôle pour** $n = 5$: $30 + 6 = 36 = 6^2$ ✓
- **Contrôle pour** $n = 9$: $90 + 10 = 100 = 10^2$ ✓
- **Contrôle pour** $n = 0$: $0 + 1 = 1 = 1^2$ ✓
- **Variante avec le plus petit** : $n(n + 1) + n$ ✓

- **Facteur commun** : n ✓
- **Mise en facteur** : $n(n + 1 + 1) = n(n + 2)$ ✓
- **Est-ce un carré ?** Pas en général ✓
- **Contrôle pour** $n = 5$: $5 \times 7 = 35$, pas un carré ✓
- **Contrôle pour** $n = 3$: $3 \times 5 = 15$, pas un carré ✓
- **Conclusion** : seule la version avec $n + 1$ donne un carré ✓
- **Une autre identité célèbre** : $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ est toujours un carré ✓
- **Contrôle pour** $n = 1$: $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$ ✓
- **Contrôle pour** $n = 2$: $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$ ✓
- **Contrôle pour** $n = 3$: $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361 = 19^2$ ✓

Réponse. $n(n + 1) + (n + 1) = (n + 1)^2$, toujours un carré ; mais $n(n + 1) + n = n(n + 2)$ ne l'est pas.

Correction de l'exercice 7 - Comparer deux expressions

- **Développement de** A : $x^2 - x + 3x - 3$ ✓
- **Réduction** : $x^2 + 2x - 3$ ✓
- **Différence** : $A - B$ ✓
- **Calcul** : $(x^2 + 2x - 3) - (x^2 + 2x - 4)$ ✓
- **Suppression de la parenthèse** : $x^2 + 2x - 3 - x^2 - 2x + 4$ ✓
- **Réduction** :

$$A - B = 1$$

- **Conclusion** : A dépasse toujours B de 1 ✓
- **Écriture équivalente** : $A = B + 1$ ✓
- **Contrôle en** $x = 0$: $A = 3 \times (-1) = -3$ ✓
- **Et** : $B = -4$ ✓
- **Différence** : $-3 - (-4) = 1$ ✓
- **Contrôle en** $x = 2$: $A = 5 \times 1 = 5$ ✓
- **Et** : $B = 4 + 4 - 4 = 4$ ✓
- **Différence** : 1 ✓
- **Contrôle en** $x = -5$: $A = (-2) \times (-6) = 12$ ✓
- **Et** : $B = 25 - 10 - 4 = 11$ ✓
- **Différence** : 1 ✓
- **Remarque** : la différence est **constante**, elle ne dépend pas de x ✓
- **Explication** : les deux expressions ont les mêmes termes en x^2 et en x ✓

Réponse. $A - B = 1$: A dépasse toujours B de 1, quel que soit x .

Correction de l'exercice 8 - Une égalité fausse

- **Contre-exemple** : $x = 1$ et $y = 1$ ✓
- **Membre de gauche** : $(1 + 1)^2 = 4$ ✓
- **Membre de droite** : $1 + 1 = 2$ ✓
- **Verdict** : $4 \neq 2$, l'affirmation est **fausse** ✓
- **Développement correct** : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ✓
- **Terme oublié** : le double produit $2xy$ ✓
- **Cas d'égalité** : il faut $2xy = 0$ ✓

— **Résolution** : $xy = 0$ ✓

— **Conclusion** :

l'égalité n'est vraie que si $x = 0$ ou $y = 0$

— **Contrôle avec** $x = 0$: $(0 + y)^2 = y^2$ et $0 + y^2 = y^2$ ✓

— **Contrôle avec** $y = 0$: symétrique ✓

— **Contrôle avec** $x = 5$ **et** $y = 0$: $25 = 25$ ✓

— **Contrôle avec** $x = 3$ **et** $y = 4$: $49 \neq 25$ ✓

— **Remarque** : 3, 4 et 5 vérifient $3^2 + 4^2 = 5^2$, mais $(3 + 4)^2 = 49 \neq 25$ ✓

— **Confusion fréquente** : entre le théorème de Pythagore et cette « identité » inventée ✓

— **Erreur voisine** : $\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$ ✓

— **Contrôle** : $\sqrt{9 + 16} = 5$, alors que $3 + 4 = 7$ ✓

— **Règle générale** : le carré, la racine et l'inverse ne se **distribuent pas** sur une somme ✓

Réponse. Faux : il manque $2xy$. L'égalité n'a lieu que si $x = 0$ ou $y = 0$.

Correction de l'exercice 9 - Nombre de diagonales d'un polygone

— **Pour le carré** : $n = 4$ ✓

— **Calcul** : $\frac{4 \times 1}{2} = 2$ ✓

— **Vérification géométrique** : un carré a bien 2 diagonales ✓

— **Pour le pentagone** : $n = 5$ ✓

— **Calcul** : $\frac{5 \times 2}{2} = 5$ ✓

— **Vérification** : un pentagone a bien 5 diagonales ✓

— **Pour l'hexagone** : $\frac{6 \times 3}{2} = 9$ ✓

— **Pour le triangle** : $\frac{3 \times 0}{2} = 0$ ✓

— **Cohérence** : un triangle n'a aucune diagonale ✓

— **Démonstration du caractère entier** : il faut que $n(n - 3)$ soit **pair** ✓

— **Premier cas** : n pair, donc $n(n - 3)$ est pair ✓

— **Second cas** : n impair ✓

— **Conséquence** : $n - 3$ est **pair**, car impair moins impair donne pair ✓

— **Donc** : le produit est pair ✓

— **Conclusion** :

$$\frac{n(n - 3)}{2} \text{ est toujours un entier}$$

— **Contrôle pour** $n = 7$: $7 - 3 = 4$, pair ✓

— **Calcul** : $\frac{28}{2} = 14$ diagonales ✓

— **Contrôle pour** $n = 10$: $\frac{70}{2} = 35$ ✓

— **Croissance** : le nombre de diagonales croît beaucoup plus vite que n ✓

— **Contrôle pour** $n = 20$: $\frac{340}{2} = 170$ diagonales ✓

Réponse. 2 pour le carré, 5 pour le pentagone ; $n(n - 3)$ est toujours pair, donc le quotient est entier.

Correction de l'exercice 10 - Somme de trois carrés consécutifs

- **Écriture des trois entiers** : $n - 1$, n et $n + 1$ ✓
- **Astuce** : centrer sur n simplifie les calculs ✓
- **Somme des carrés** : $(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2$ ✓
- **Premier carré** : $n^2 - 2n + 1$ ✓
- **Troisième carré** : $n^2 + 2n + 1$ ✓
- **Somme** : $n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1$ ✓
- **Réduction** : les termes en n s'annulent ✓
- **Résultat** : $3n^2 + 2$ ✓
- **Expression demandée** : on retranche 2 ✓
- **Résultat final** :

$$3n^2 + 2 - 2 = 3n^2$$

- **Conclusion** : c'est un multiple de 3 ✓
- **Contrôle avec 4, 5, 6** : $16 + 25 + 36 = 77$ ✓
- **Moins 2** : $75 = 3 \times 25$ ✓
- **Vérification** : $n = 5$, et $3 \times 25 = 75$ ✓
- **Contrôle avec 9, 10, 11** : $81 + 100 + 121 = 302$ ✓
- **Moins 2** : $300 = 3 \times 100$ ✓
- **Vérification** : $n = 10$, et $3 \times 100 = 300$ ✓
- **Résultat plus fort** : le quotient est même un **carré parfait** ✓
- **Contrôle** : $\frac{75}{3} = 25 = 5^2$ et $\frac{300}{3} = 100 = 10^2$ ✓
- **Intérêt de l'écriture centrée** : avec n , $n + 1$, $n + 2$, le calcul serait plus lourd ✓

Réponse. La somme vaut $3n^2 + 2$, donc la somme diminuée de 2 vaut $3n^2$: un multiple de 3.

Correction de l'exercice 11 - Périmètre et aire

- **Demi-périmètre** : 20 cm ✓
- **Largeur** : $20 - x$ ✓
- **Contrainte** : $0 < x < 20$ ✓
- **Aire** : produit longueur par largeur ✓
- **Expression** :

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

- **Contrôle en $x = 12$** : largeur 8, aire 96 ✓
- **Vérification** : $240 - 144 = 96$ ✓
- **Objectif** : montrer que $A(x) \leq 100$ ✓
- **Méthode** : étudier la différence $100 - A(x)$ ✓
- **Calcul** : $100 - 20x + x^2$ ✓
- **Reconnaissance** : $x^2 - 20x + 100$ ✓
- **Test du carré** : $100 = 10^2$ et $2 \times x \times 10 = 20x$ ✓
- **Factorisation** : $(x - 10)^2$ ✓
- **Argument clé** : un carré est **toujours positif ou nul** ✓
- **Donc** : $100 - A(x) \geq 0$ ✓
- **Conclusion** :

$$A(x) \leq 100 \text{ cm}^2$$

- **Cas d'égalité** : $x = 10$ ✓
- **Forme du rectangle** : un **carré** de 10 cm de côté ✓
- **Contrôle** : périmètre 40 cm et aire 100 cm^2 ✓
- **Règle générale retrouvée** : à périmètre fixé, le carré a l'aire maximale ✓

Réponse. $A(x) = 20x - x^2$, et $100 - A(x) = (x - 10)^2 \geq 0$: l'aire ne dépasse jamais 100 cm^2 .

Correction de l'exercice 12 - Deux nombres de somme fixée

- **Écriture centrée** : les deux nombres sont $6 + d$ et $6 - d$ ✓
- **Contrôle de la somme** : $(6 + d) + (6 - d) = 12$ ✓
- **Vérification de d** : la différence vaut $2d$, donc d en est bien la moitié ✓
- **Produit** : $(6 + d)(6 - d)$ ✓
- **Identité** : produit conjugué ✓
- **Développement** :

$$(6 + d)(6 - d) = 36 - d^2$$

- **Conclusion** : le produit vaut bien $36 - d^2$ ✓
- **Maximisation** : d^2 est toujours positif ou nul ✓
- **Conséquence** : $36 - d^2 \leq 36$ ✓
- **Produit maximal** :

$$36$$

- **Cas d'égalité** : $d = 0$, donc les deux nombres sont **égaux** ✓
- **Valeurs** : 6 et 6 ✓
- **Contrôle** : $6 \times 6 = 36$ ✓
- **Contrôle avec 5 et 7** : $d = 1$, produit $35 = 36 - 1$ ✓
- **Contrôle avec 2 et 10** : $d = 4$, produit $20 = 36 - 16$ ✓
- **Contrôle avec 0 et 12** : $d = 6$, produit $0 = 36 - 36$ ✓
- **Contrôle avec -3 et 15** : $d = 9$, produit $-45 = 36 - 81$ ✓
- **Interprétation** : plus les nombres s'écartent, plus le produit diminue ✓

Réponse. Avec $6 + d$ et $6 - d$, le produit vaut $36 - d^2 \leq 36$: le maximum est 36, pour deux nombres égaux à 6.

Correction de l'exercice 13 - Un entier toujours divisible

- **Développement du carré** : $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$ ✓
- **Soustraction de 1** : $4n^2 + 4n$ ✓
- **Facteur commun** : $4n$ ✓
- **Factorisation** :

$$(2n + 1)^2 - 1 = 4n(n + 1)$$

- **Observation clé** : $n(n + 1)$ est un produit de deux entiers **consécutifs** ✓
- **Conséquence** : ce produit est **pair** ✓
- **Écriture** : $n(n + 1) = 2k$ pour un certain entier k ✓
- **Substitution** : $4 \times 2k = 8k$ ✓
- **Conclusion** : l'expression est divisible par 8 ✓

- **Contrôle pour $n = 1$** : $9 - 1 = 8 = 8 \times 1$ ✓
 - **Contrôle pour $n = 2$** : $25 - 1 = 24 = 8 \times 3$ ✓
 - **Contrôle pour $n = 3$** : $49 - 1 = 48 = 8 \times 6$ ✓
 - **Contrôle pour $n = 4$** : $81 - 1 = 80 = 8 \times 10$ ✓
 - **Contrôle pour $n = 0$** : $1 - 1 = 0$, divisible par 8 ✓
 - **Reformulation du résultat** : le carré de tout nombre **impair** vaut $8k + 1$ ✓
 - **Contrôle** : $7^2 = 49 = 8 \times 6 + 1$ ✓
 - **Autre contrôle** : $11^2 = 121 = 8 \times 15 + 1$ ✓
 - **Conséquence** : le carré d'un impair laisse toujours le reste 1 dans la division par 8 ✓
- Réponse.** $(2n + 1)^2 - 1 = 4n(n + 1)$, et $n(n + 1)$ est pair : le produit vaut donc $8k$.

Correction de l'exercice 14 - Programme et résultat constant

- **Traduction étape par étape** ✓
- **Après « ajouter 2 »** : $x + 2$ ✓
- **Après « élever au carré »** : $(x + 2)^2$ ✓
- **Après « soustraire le carré du nombre »** : $(x + 2)^2 - x^2$ ✓
- **Après « soustraire 4 »** : $(x + 2)^2 - x^2 - 4$ ✓
- **Après la division** : $\frac{(x + 2)^2 - x^2 - 4}{x}$ ✓
- **Développement du carré** : $x^2 + 4x + 4$ ✓
- **Numérateur** : $x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4$ ✓
- **Réduction** : $4x$ ✓
- **Quotient** :

$$\frac{4x}{x} = 4$$

- **Conclusion** : le résultat est toujours 4, pour tout x non nul ✓
- **Contrôle pour $x = 3$** : $25 - 9 - 4 = 12$, puis $\frac{12}{3} = 4$ ✓
- **Contrôle pour $x = 10$** : $144 - 100 - 4 = 40$, puis $\frac{40}{10} = 4$ ✓
- **Contrôle pour $x = -1$** : $1 - 1 - 4 = -4$, puis $\frac{-4}{-1} = 4$ ✓
- **Contrôle pour $x = 0,5$** : $6,25 - 0,25 - 4 = 2$, puis $\frac{2}{0,5} = 4$ ✓
- **Pourquoi exclure $x = 0$** ? La division par zéro est impossible ✓
- **Que vaut le numérateur en $x = 0$** ? $4 - 0 - 4 = 0$ ✓
- **Forme du programme** : le numérateur vaut toujours $4x$, il s'annule avec x ✓
- **Modification pour obtenir 10** : il faudrait ajouter 5 au lieu de 2 ✓
- **Contrôle** : $(x + 5)^2 - x^2 - 25 = 10x$, donc le quotient vaut 10 ✓

Réponse. Le numérateur se réduit à $4x$, donc le quotient vaut toujours 4.

Correction de l'exercice 15 - Vrai ou faux

- a) **Faux** ✓
- **Contre-exemple** : $x = 0,5$ ✓
 - **Calcul** : $0,25 < 0,5$ ✓
 - **Autre contre-exemple** : $x = 1$, où $1 = 1$ ✓
 - **Cas où c'est vrai** : $x > 1$ ou $x < 0$ ✓

— **Contrôle** : pour $x = -2$, on a $4 > -2$ ✓

b) **Vrai** ✓

— **Développement** : $(x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2$ ✓

— **Réduction** : $2x + 1$ ✓

— **Conclusion** : c'est un double plus 1, donc **impair** ✓

— **Contrôle pour** $x = 5$: $36 - 25 = 11$, impair ✓

— **Contrôle pour** $x = 10$: $121 - 100 = 21$, impair ✓

c) **Faux** ✓

— **Contre-exemple** : $x = -3$ ✓

— **Vérification** : $(-3)^2 = 9$ ✓

— **Conclusion correcte** : $x = 3$ **ou** $x = -3$ ✓

— **Méthode propre** : $x^2 - 9 = 0$, donc $(x - 3)(x + 3) = 0$ ✓

— **Erreur classique** : oublier la solution négative ✓

d) **Vrai** ✓

— **Argument** : $x^2 \geq 0$ pour tout x ✓

— **Conséquence** : $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ ✓

— **Valeur minimale** : 1, atteinte en $x = 0$ ✓

— **Conclusion** : l'expression ne s'annule **jamais** ✓

— **Conséquence pratique** : $x^2 + 1$ ne se factorise pas ✓

— **Contrôle** : $x^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution ✓

Réponse. a) faux ($x = 0,5$) · b) vrai ($2x + 1$) · c) faux ($x = -3$) · d) vrai.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : trois démonstrations

a) **Méthode** : différence de carrés ✓

— **Identification** : $A = n + 4$ et $B = n + 2$ ✓

— **Premier facteur** : $A - B = 2$ ✓

— **Second facteur** : $A + B = 2n + 6$ ✓

— **Produit** : $2(2n + 6)$ ✓

— **Factorisation complète** :

$$(n + 4)^2 - (n + 2)^2 = 4(n + 3)$$

— **Conclusion** : c'est un multiple de 4 ✓

— **Contrôle pour** $n = 1$: $25 - 9 = 16 = 4 \times 4$ ✓

— **Contrôle pour** $n = 5$: $81 - 49 = 32 = 4 \times 8$ ✓

b) **Factorisation partielle** : $n^2 + n = n(n + 1)$ ✓

— **Argument** : produit de deux entiers consécutifs, donc **pair** ✓

— **Écriture** : $n(n + 1) = 2k$ ✓

— **Expression complète** : $2k + 2 = 2(k + 1)$ ✓

— **Conclusion** :

$$n^2 + n + 2 \text{ est toujours pair}$$

— **Contrôle pour** $n = 4$: $16 + 4 + 2 = 22$, pair ✓

— **Contrôle pour** $n = 7$: $49 + 7 + 2 = 58$, pair ✓

c) **Développement** : $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ ✓

- **Somme** : $n^2 + 2n + 1 + n^2$ ✓
- **Réduction** : $2n^2 + 2n + 1$ ✓
- **Factorisation partielle** : $2(n^2 + n) + 1$ ✓
- **Conclusion** : c'est un double plus 1, donc **impair** ✓
- **Contrôle pour** $n = 3$: $16 + 9 = 25$, impair ✓
- **Contrôle pour** $n = 6$: $49 + 36 = 85$, impair ✓
- **Interprétation** : la somme des carrés de deux entiers consécutifs est toujours impaire ✓

d) **Tests initiaux** ✓

- **Pour** $n = 1$: $1 - 1 + 11 = 11$, premier ✓
- **Pour** $n = 2$: $4 - 2 + 11 = 13$, premier ✓
- **Pour** $n = 3$: $9 - 3 + 11 = 17$, premier ✓
- **Pour** $n = 5$: $25 - 5 + 11 = 31$, premier ✓
- **Pour** $n = 10$: $100 - 10 + 11 = 101$, premier ✓
- **Impression trompeuse** : la formule semble produire des nombres premiers ✓
- **Contre-exemple décisif** : $n = 11$ ✓
- **Calcul** : $121 - 11 + 11 = 121$ ✓
- **Nature de** 121 : 11^2 , donc **non premier** ✓
- **Réponse** :

non, $n = 11$ donne $121 = 11^2$

- **Explication** : $n^2 - n + 11 = n(n - 1) + 11$, et pour $n = 11$ tout est multiple de 11 ✓
- **Autre contre-exemple** : $n = 12$ donne $144 - 12 + 11 = 143 = 11 \times 13$ ✓
- **Leçon fondamentale** : dix exemples justes ne **démontrent** rien ✓
- **Formule célèbre analogue** : $n^2 + n + 41$ est premier pour n de 0 à 39, mais pas pour $n = 40$ ✓
- **Contrôle** : $1600 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$ ✓

Réponse. a) $4(n + 3)$ · b) $n(n + 1) + 2$, somme de deux pairs · c) $2(n^2 + n) + 1$, impair · d) non : $n = 11$ donne $121 = 11^2$.