Plaquette 4 – Démontrer avec le calcul littéral

Calcul littéral et identités remarquables — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Traduire un programme de calcul. Chaque instruction devient une opération sur x.

Instruction	Écriture
choisir un nombre	x
ajouter 5	$x+5$
multiplier par 3	$3x$ ou $3(x+5)$ selon l'étape
élever au carré	x^2 ou $(x+5)^2$
soustraire le nombre de départ	$\ldots - x$
prendre le double	$2(\ldots)$

Attention aux parenthèses. « Ajouter 5 puis multiplier par 3 » donne $3(x+5)$, alors que « multiplier par 3 puis ajouter 5 » donne $3x+5$. Ce n'est pas la même chose.

Prouver une propriété des nombres. On écrit l'entier avec une lettre, on développe, on factorise pour faire apparaître la conclusion.

On veut montrer que…	On fait apparaître
c'est pair	un facteur 2
c'est multiple de 3	un facteur 3
c'est un carré parfait	une forme $(\ldots)^2$
c'est positif	une somme de carrés, ou un carré

Un carré est toujours positif ou nul. C'est l'argument de base pour prouver qu'une expression est positive :

$$x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \geq 1 > 0$$

Montrer que deux expressions sont égales. On développe les deux membres séparément et on compare les formes réduites. Un ou deux exemples numériques **ne démontrent rien**.

Montrer qu'une égalité est fausse. Un seul **contre-exemple** suffit : une valeur de x pour laquelle les deux membres diffèrent.

Rédaction attendue. « Soit x un nombre quelconque… » puis le calcul, puis « donc, pour tout x, … ». La conclusion doit répondre à la question posée.

Correction de l'exercice 1 – Un programme de calcul

a) En partant de 4 : $4+6=10$, $10\times 4=40$, $40+9=49$. En partant de -2 : $-2+6=4$, $4\times(-2)=-8$, $-8+9=1$. On obtient $49=7^2$ et $1=1^2$.

b) Avec x au départ, le programme donne $x(x+6)+9=x^2+6x+9$. On reconnaît un carré parfait, car $9=3^2$ et $6x=2\times x\times 3$:

$$x(x+6)+9=(x+3)^2$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Si l'on part d'un entier, le résultat est donc le carré de l'entier $x+3$: $(4+3)^2 = 49$ et $(-2+3)^2 = 1$. Le résultat n'est jamais négatif et vaut 0 seulement pour $x = -3$.

Réponse. a) 49 et 1 · b) le résultat vaut $(x+3)^2$, toujours un carré.

Correction de l'exercice 2 – Deux programmes équivalents

On traduit chaque programme par une expression, puis on compare les formes développées.

Le programme A donne $(2x+3)^2$. On développe avec $a = 2x$ et $b = 3$:

$$(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

Le programme B donne directement $4x^2 + 12x + 9$. Les deux expressions sont identiques : les programmes sont **équivalents**, pour tout nombre de départ.

Contrôles : pour $x = 1$, A donne $5^2 = 25$ et B donne $4 + 12 + 9 = 25$; pour $x = -1$, on obtient 1 dans les deux cas. Ces essais illustrent le résultat, mais seule l'égalité des formes développées le démontre.

Réponse. Oui : les deux valent $4x^2 + 12x + 9$.

Correction de l'exercice 3 – Somme de deux nombres pairs consécutifs

Un nombre pair s'écrit $2n$, avec n entier ; le nombre pair suivant est $2n+2$ (et non $2n+1$, qui est impair). Leur somme vaut

$$2n + (2n+2) = 4n + 2 = 2(2n+1)$$

C'est le double d'un nombre **impair** : elle ne contient qu'un seul facteur 2, et le reste de sa division par 4 vaut toujours 2. Elle n'est donc jamais un multiple de 4.

Exemples : $6 + 8 = 14 = 4 \times 3 + 2$ et $10 + 12 = 22 = 4 \times 5 + 2$. À l'inverse, la somme de deux impairs consécutifs vaut $(2n+1) + (2n+3) = 4n + 4 = 4(n+1)$: elle est toujours un multiple de 4 ($7 + 9 = 16$).

Réponse. La somme vaut $4n + 2 = 2(2n+1)$: elle laisse toujours un reste de 2 dans la division par 4.

Correction de l'exercice 4 – Expression toujours positive

On fait apparaître un carré : $x^2 - 8x$ est le début du développement de $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$. Il manque 4 pour obtenir 20, donc

$$x^2 - 8x + 20 = (x-4)^2 + 4$$

Un carré est toujours positif ou nul : $(x-4)^2 \geq 0$, donc $(x-4)^2 + 4 \geq 4$. L'expression est toujours supérieure ou égale à 4, donc strictement positive.

Sa valeur minimale est 4, atteinte quand le carré est nul, c'est-à-dire pour $x = 4$: $16 - 32 + 20 = 4$. **Contrôles** : en $x = 3$ et en $x = 5$, on trouve 5 ; les valeurs sont symétriques autour de $x = 4$.

Réponse. $x^2 - 8x + 20 = (x-4)^2 + 4 \geq 4$: le minimum vaut 4, atteint en $x = 4$.

Correction de l'exercice 5 – Carré d'un nombre finissant par 5

On développe le carré avec l'identité $(a+b)^2$, où $a = 10n$ et $b = 5$:

$$(10n+5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n+1) + 25$$

Le terme $100n(n+1)$ est un multiple de 100 : il se termine par 00. En lui ajoutant 25, le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

carré se termine donc toujours par 25, et les chiffres qui précèdent forment le nombre $n(n+1)$.

Règle de calcul mental : pour élever au carré un nombre qui se termine par 5, on multiplie son nombre de dizaines n par $n+1$ et l'on écrit 25 à la suite. Exemples : 35^2 : $3 \times 4 = 12$, d'où 1225 ; 75^2 : $7 \times 8 = 56$, d'où 5625.

Réponse. $(10n+5)^2 = 100n(n+1) + 25$: le carré finit par 25, précédé de $n(n+1)$.

Correction de l'exercice 6 – Produit d'entiers consécutifs et carrés

a) Les deux termes contiennent le facteur $(n+1)$:

$$n(n+1) + (n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2$$

C'est le carré de l'entier $n+1$, donc un carré parfait. Exemples : $n = 5$ donne $30 + 6 = 36 = 6^2$; $n = 9$ donne $90 + 10 = 100$.

b) $n(n+1) + n = n[(n+1)+1] = n(n+2)$. Ce produit n'est pas un carré en général : pour $n = 5$, on obtient 35, et pour $n = 3$, 15, qui ne sont pas des carrés. Seule la première version donne toujours un carré parfait.

Réponse. $n(n+1) + (n+1) = (n+1)^2$, toujours un carré ; mais $n(n+1) + n = n(n+2)$ ne l'est pas.

Correction de l'exercice 7 – Comparer deux expressions

Pour comparer deux expressions, on étudie leur différence. On développe d'abord A :

$$A = (x+3)(x-1) = x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 2x - 3$$

Alors $A - B = (x^2 + 2x - 3) - (x^2 + 2x - 4) = x^2 + 2x - 3 - x^2 - 2x + 4 = 1$.

La différence vaut 1 quel que soit x : A dépasse toujours B de 1, c'est-à-dire $A = B + 1$.

Contrôles : en $x = 2$, $A = 5$ et $B = 4$; en $x = -5$, $A = 12$ et $B = 11$. Les deux expressions ont les mêmes termes en x^2 et en x, seule la constante diffère.

Réponse. $A - B = 1$: A dépasse toujours B de 1, quel que soit x.

Correction de l'exercice 8 – Une égalité fausse

Pour montrer qu'une égalité générale est fausse, un contre-exemple suffit : avec $x = 1$ et $y = 1$, $(1+1)^2 = 4$ alors que $1^2 + 1^2 = 2$. L'affirmation est **fausse**.

Le développement correct est $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$: l'élève a oublié le double produit $2xy$. L'égalité $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ n'est vraie que si ce terme est nul :

$$2xy = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Contrôle : avec $x = 3$ et $y = 4$, $(3+4)^2 = 49$, alors que $3^2 + 4^2 = 25$. Il ne faut pas confondre cette fausse identité avec le théorème de Pythagore.

Réponse. Faux : il manque $2xy$. L'égalité n'a lieu que si $x = 0$ ou $y = 0$.

Correction de l'exercice 9 – Nombre de diagonales d'un polygone

Pour le carré, $n = 4$: $\dfrac{4 \times 1}{2} = 2$ diagonales, ce qui est juste. Pour le pentagone, $n = 5$: $\dfrac{5 \times 2}{2} = 5$ diagonales, juste aussi (et un triangle, avec $n = 3$, n'en a aucune).

Pour que le quotient soit entier, il faut que $n(n-3)$ soit pair. Si n est pair, le produit est pair. Si n est impair, $n - 3$ est la différence de deux impairs, donc pair, et le produit est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

encore pair. Dans tous les cas,

$$\frac{n(n-3)}{2} \text{ est un entier}$$

Exemples : $n = 7$ donne $\frac{28}{2} = 14$ diagonales ; $n = 20$ en donne 170 : le nombre de diagonales croît bien plus vite que le nombre de côtés.

Réponse. 2 pour le carré, 5 pour le pentagone ; $n(n-3)$ est toujours pair, donc le quotient est entier.

Correction de l'exercice 10 – Somme de trois carrés consécutifs

On centre les trois entiers sur celui du milieu : $n-1$, n et $n+1$. Les termes en n s'annulent alors :

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = (n^2 - 2n + 1) + n^2 + (n^2 + 2n + 1) = 3n^2 + 2$$

Diminuée de 2, la somme vaut $3n^2$: c'est un multiple de 3 (et même le triple d'un carré).

Contrôles : avec 4, 5, 6, on a $16 + 25 + 36 = 77$ et $77 - 2 = 75 = 3 \times 5^2$; avec 9, 10, 11, on a $302 - 2 = 300 = 3 \times 10^2$. Écrire les entiers n, $n+1$, $n+2$ marcherait aussi, mais le calcul serait plus lourd.

Réponse. La somme vaut $3n^2 + 2$, donc la somme diminuée de 2 vaut $3n^2$: un multiple de 3.

Correction de l'exercice 11 – Périmètre et aire

Le demi-périmètre vaut 20 cm, donc la largeur mesure $20 - x$ (avec $0 < x < 20$). L'aire vaut

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

Pour montrer que $A(x) \leq 100$, on étudie la différence : $100 - A(x) = x^2 - 20x + 100$. C'est un carré parfait, car $100 = 10^2$ et $20x = 2 \times x \times 10$: $100 - A(x) = (x - 10)^2$.

Un carré est toujours positif ou nul, donc $100 - A(x) \geq 0$, c'est-à-dire $A(x) \leq 100$ cm². L'égalité a lieu pour $x = 10$: le rectangle est alors un carré de 10 cm de côté. À périmètre fixé, c'est le carré qui a la plus grande aire.

Réponse. $A(x) = 20x - x^2$, et $100 - A(x) = (x-10)^2 \geq 0$: l'aire ne dépasse jamais 100 cm².

Correction de l'exercice 12 – Deux nombres de somme fixée

On écrit les deux nombres de part et d'autre de leur moyenne 6 : $6 + d$ et $6 - d$. Leur somme vaut bien 12, et leur différence $2d$, donc d est la moitié de la différence. Leur produit est un produit d'une somme et d'une différence :

$$(6 + d)(6 - d) = 36 - d^2$$

Comme $d^2 \geq 0$, le produit est toujours inférieur ou égal à 36. Il vaut 36 quand $d = 0$, c'est-à-dire quand les deux nombres sont égaux à 6.

Contrôles : $5 \times 7 = 35 = 36 - 1^2$; $2 \times 10 = 20 = 36 - 4^2$; $0 \times 12 = 0 = 36 - 6^2$. Plus les deux nombres s'écartent, plus leur produit diminue.

Réponse. Avec $6 + d$ et $6 - d$, le produit vaut $36 - d^2 \leq 36$: le maximum est 36, pour deux nombres égaux à 6.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Un entier toujours divisible

On développe, puis on factorise :

$$(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n(n+1)$$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs : il est pair, donc il s'écrit $2k$ avec k entier. Alors $(2n+1)^2 - 1 = 4 \times 2k = 8k$: c'est un multiple de 8.

Contrôles : $n = 1$ donne $9 - 1 = 8$; $n = 2$ donne $25 - 1 = 24 = 8 \times 3$; $n = 3$ donne $48 = 8 \times 6$. Autrement dit, le carré de tout nombre impair laisse le reste 1 dans la division par 8, comme $49 = 8 \times 6 + 1$.

Réponse. $(2n+1)^2 - 1 = 4n(n+1)$, et $n(n+1)$ est pair : le produit vaut donc $8k$.

Correction de l'exercice 14 – Programme et résultat constant

On traduit le programme étape par étape avec un nombre de départ x non nul : $x + 2$, puis $(x+2)^2$, puis $(x+2)^2 - x^2$, puis $(x+2)^2 - x^2 - 4$, et enfin le quotient par x. On développe le numérateur :

$$(x+2)^2 - x^2 - 4 = x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4 = 4x$$

Le résultat vaut donc $\dfrac{4x}{x} = 4$, quel que soit le nombre de départ non nul.

Contrôles : pour $x = 3$, $25 - 9 - 4 = 12$ et $12 \div 3 = 4$; pour $x = -1$, $1 - 1 - 4 = -4$ et $-4 \div (-1) = 4$. On exclut $x = 0$, car on ne peut pas diviser par zéro. En ajoutant 5 au lieu de 2 (et en retranchant 25), on obtiendrait toujours 10.

Réponse. Le numérateur se réduit à $4x$, donc le quotient vaut toujours 4.

Correction de l'exercice 15 – Vrai ou faux

a) **Faux.** Pour $x = 0{,}5$, on a $x^2 = 0{,}25$, qui est inférieur à 0,5. L'affirmation n'est vraie que pour $x > 1$ ou $x < 0$.

b) **Vrai.** $(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$: pour x entier, c'est un nombre pair plus 1, donc un impair (par exemple $36 - 25 = 11$).

c) **Faux.** $(-3)^2 = 9$ aussi. En effet, $x^2 = 9$ équivaut à $(x-3)(x+3) = 0$, donc

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

d) **Vrai.** Un carré est toujours positif ou nul, donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Sa valeur minimale est 1, atteinte en $x = 0$: l'expression ne s'annule jamais.

Réponse. a) faux ($x = 0{,}5$) · b) vrai ($2x + 1$) · c) faux ($x = -3$) · d) vrai.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : trois démonstrations

a) C'est une différence de carrés $A^2 - B^2$ avec $A = n + 4$ et $B = n + 2$: $A - B = 2$ et $A + B = 2n + 6$, donc $(n+4)^2 - (n+2)^2 = 2(2n+6) = 4(n+3)$, un multiple de 4.

b) $n^2 + n + 2 = n(n+1) + 2$. Le produit $n(n+1)$ de deux entiers consécutifs est pair, et en lui ajoutant 2 on obtient encore un nombre pair.

c) $(n+1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1 = 2(n^2 + n) + 1$: un nombre pair plus 1, donc un impair.

d) Les premiers essais donnent des nombres premiers (11, 13, 17, 31, 101…). Mais pour $n = 11$:

$$11^2 - 11 + 11 = 121 = 11^2$$

qui n'est pas premier. La réponse est **non** : de nombreux exemples ne démontrent pas

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

une propriété générale, alors qu'un seul contre-exemple suffit à la réfuter.

Réponse. a) $4(n+3)$ · b) $n(n+1)+2$, somme de deux pairs · c) $2(n^2+n)+1$, impair · d) non : $n=11$ donne $121=11^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).