

Plaque 1 - Développer, réduire, factoriser

Calcul littéral et identités remarquables — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Distributivité : $k(a + b) = ka + kb$ et $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.
- Les trois **identités remarquables** :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$
- **Développer** : transformer un produit en somme. **Factoriser** : transformer une somme en produit.
- Pour factoriser : on cherche d'abord un **facteur commun**, sinon on regarde si l'expression est de la forme $a^2 - b^2$ ou $a^2 \pm 2ab + b^2$.
- Règles de signes : $-(a + b) = -a - b$ et $-(a - b) = -a + b$.
- $x \times x = x^2$, $(3x)^2 = 9x^2$, $(-x)^2 = x^2$.
- Une égalité de deux expressions littérales se démontre en développant les deux membres (ou l'un des deux) et en comparant.

Correction de l'exercice 1 - Développer avec la distributivité simple

- a) $A = 4 \times 3x - 4 \times 2 = 12x - 8$.
 b) $B = -3 \times 2x + (-3) \times 5 = -6x - 15$.
 c) $2x(x - 4) = 2x^2 - 8x$, donc $C = 2x^2 - 8x + 5x = 2x^2 - 3x$.

Piège. En b), le signe $-$ multiplie les **deux** termes de la parenthèse.

Réponse. a) $12x - 8$ · b) $-6x - 15$ · c) $2x^2 - 3x$.

Correction de l'exercice 2 - Développer un produit de deux facteurs

On applique la double distributivité $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

- $3x \times 2x = 6x^2$;
- $3x \times 5 = 15x$;
- $-2 \times 2x = -4x$;
- $-2 \times 5 = -10$.
- On réduit les termes en x : $15x - 4x = 11x$.

$$D = 6x^2 + 11x - 10$$

Réponse. $D = 6x^2 + 11x - 10$.

Correction de l'exercice 3 - Les trois identités

- a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$, $b = 7$: $x^2 + 14x + 49$.
 b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 2x$, $b = 3$: $(2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 9 = 4x^2 - 12x + 9$.
 c) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ avec $a = 5$, $b = x$: $25 - x^2$.

Piège. $(2x - 3)^2 \neq 4x^2 - 9$: il ne faut pas oublier le double produit $-12x$.

Réponse. a) $x^2 + 14x + 49$ · b) $4x^2 - 12x + 9$ · c) $25 - x^2$.

Correction de l'exercice 4 - Factoriser avec un facteur commun

a) $6x^2 = 3x \times 2x$ et $9x = 3x \times 3$: le facteur commun est $3x$.

$$E = 3x(2x + 3)$$

b) Le facteur commun est la parenthèse $(2x + 1)$:

$$F = (2x + 1)[(x - 3) + 4] = (2x + 1)(x + 1)$$

— Contrôle de b) en développant : $(2x + 1)(x + 1) = 2x^2 + 3x + 1$, et
 $F = 2x^2 - 5x - 3 + 8x + 4 = 2x^2 + 3x + 1$. Cohérent.

Réponse. a) $E = 3x(2x + 3)$ · b) $F = (2x + 1)(x + 1)$.

Correction de l'exercice 5 - Factoriser avec une identité

On lit les identités remarquables **dans l'autre sens**.

a) $81 = 9^2$, donc $G = x^2 - 9^2 = (x - 9)(x + 9)$.

b) $9x^2 = (3x)^2$ et $25 = 5^2$, donc $H = (3x - 5)(3x + 5)$.

c) On teste $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$: le terme du milieu correspond, donc $K = (x - 5)^2$.

Méthode. Pour une expression à trois termes, on identifie a et b grâce aux carrés, puis on **vérifie le double produit**.

Réponse. a) $(x - 9)(x + 9)$ · b) $(3x - 5)(3x + 5)$ · c) $(x - 5)^2$.

Correction de l'exercice 6 - Enlever une parenthèse précédée d'un signe moins

— Pour L : $-(2x - 5) = -2x + 5$, donc

$$L = 4x + 3 - 2x + 5 = 2x + 8$$

— Pour M : $3(x + 2) = 3x + 6$ et $-2(4x - 1) = -8x + 2$, donc

$$M = 3x + 6 - 8x + 2 = -5x + 8$$

— Contrôle numérique avec $x = 1$: $L = 7 - (-3) = 10$ et $2 \times 1 + 8 = 10$; $M = 9 - 6 = 3$ et $-5 + 8 = 3$. Les deux résultats se confirment.

Réponse. $L = 2x + 8$ et $M = -5x + 8$.

Correction de l'exercice 7 - Choisir la bonne méthode

a) **Facteur commun** $4x$: $N = 4x(x - 5)$.

b) **Identité** $a^2 - b^2$ avec $a = 4$, $b = x$: $P = (4 - x)(4 + x)$.

c) **Identité** $(a + b)^2$: $Q = (x + 4)^2$ car $8x = 2 \times x \times 4$.

d) **Identité** $a^2 - b^2$ avec $a = x - 2$ et $b = 3$:

$$R = [(x - 2) - 3][(x - 2) + 3] = (x - 5)(x + 1)$$

— Contrôle de d) : $(x - 5)(x + 1) = x^2 - 4x - 5$, et $R = x^2 - 4x + 4 - 9 = x^2 - 4x - 5$. Cohérent.

Réponse. a) $4x(x - 5)$ · b) $(4 - x)(4 + x)$ · c) $(x + 4)^2$ · d) $(x - 5)(x + 1)$.

Correction de l'exercice 8 - Calcul astucieux

— a) $101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$.

— b) $99^2 = (100 - 1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$.

- c) $103 \times 97 = (100 + 3)(100 - 3) = 100^2 - 3^2 = 10\,000 - 9 = 9\,991$.
- C'est exactement l'intérêt des identités : transformer un calcul difficile en additions simples.

Réponse. a) $10\,201$ · b) $9\,801$ · c) $9\,991$.

Correction de l'exercice 9 - Aire et calcul littéral

a) Le nouveau côté mesure $x + 3$, donc l'aire vaut

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

b) L'aire initiale est x^2 . L'augmentation est donc

$$(x^2 + 6x + 9) - x^2 = 6x + 9$$

- Interprétation géométrique : deux rectangles de $3 \times x$ (soit $6x$) et un petit carré de 3×3 (soit 9).

c) Pour $x = 10$: augmentation = $6 \times 10 + 9 = 69 \text{ cm}^2$.

- Contrôle : $13^2 - 10^2 = 169 - 100 = 69 \text{ cm}^2$. Cohérent.

Réponse. a) $x^2 + 6x + 9$ · b) $6x + 9$ · c) 69 cm^2 .

Correction de l'exercice 10 - Démontrer une propriété des nombres

On note n le plus petit des deux entiers ; le suivant est $n + 1$.

- Différence des carrés :

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

- Or $2n$ est pair, donc $2n + 1$ est **impair** : la propriété est démontrée pour tout entier n .
- Exemples de contrôle : $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 2 \times 4 + 1$; $11^2 - 10^2 = 21 = 2 \times 10 + 1$.
- Remarque : on obtient même tous les impairs, dans l'ordre, en faisant varier n .

Réponse. $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, qui est impair.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : un programme de calcul

a) On suit les étapes : $3 + 4 = 7$, puis $7^2 = 49$, puis $49 - 16 = 33$.

b) Avec x au départ : $(x + 4)^2 - 16$.

- Développé : $x^2 + 8x + 16 - 16 = x^2 + 8x$.

- Factorisé : $x^2 + 8x = x(x + 8)$.

- On pouvait aussi factoriser directement avec $a^2 - b^2$:

$$(x + 4)^2 - 4^2 = [(x + 4) - 4][(x + 4) + 4] = x(x + 8). \text{ Même résultat.}$$

c) Un produit est nul si l'un des facteurs est nul : $x = 0$ ou $x + 8 = 0$, donc $x = 0$ ou $x = -8$.

- Vérification avec $x = -8$: $(-8 + 4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$. Correct.

Réponse. a) 33 · b) $x(x + 8)$ · c) $x = 0$ ou $x = -8$.