Plaquette 1 – Développer, réduire, factoriser

Calcul littéral et identités remarquables — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— Distributivité : $k(a+b) = ka + kb$ et $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

— Les trois **identités remarquables** :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

— **Développer** : transformer un produit en somme. **Factoriser** : transformer une somme en produit.

— Pour factoriser : on cherche d'abord un **facteur commun**, sinon on regarde si l'expression est de la forme $a^2 - b^2$ ou $a^2 \pm 2ab + b^2$.

— Règles de signes : $-(a+b) = -a - b$ et $-(a-b) = -a + b$.

— $x \times x = x^2$, $(3x)^2 = 9x^2$, $(-x)^2 = x^2$.

— Une égalité de deux expressions littérales se démontre en développant les deux membres (ou l'un des deux) et en comparant.

Correction de l'exercice 1 – Développer avec la distributivité simple

On applique la distributivité : le facteur devant la parenthèse multiplie **chacun** des termes de la parenthèse, avec son signe.

a) $A = 4 \times 3x - 4 \times 2 = 12x - 8$.

b) $B = (-3) \times 2x + (-3) \times 5 = -6x - 15$.

c) On développe d'abord $2x(x-4) = 2x^2 - 8x$, puis on réduit les termes en x :

$$C = 2x^2 - 8x + 5x = 2x^2 - 3x$$

Piège. En b), le signe $-$ multiplie les **deux** termes de la parenthèse : on n'écrit pas $-6x + 15$. **Contrôle** en $x = 1$: $B = -3 \times 7 = -21$ et $-6 - 15 = -21$.

Réponse. a) $12x - 8$ · b) $-6x - 15$ · c) $2x^2 - 3x$.

Correction de l'exercice 2 – Développer un produit de deux facteurs

On applique la double distributivité $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$: chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde, soit quatre produits.

— $3x \times 2x = 6x^2$ et $3x \times 5 = 15x$;

— $(-2) \times 2x = -4x$ et $(-2) \times 5 = -10$.

On réduit les termes en x : $15x - 4x = 11x$.

$$D = 6x^2 + 11x - 10$$

Contrôle en $x = 1$: $(3-2)(2+5) = 7$ et $6 + 11 - 10 = 7$.

Réponse. $D = 6x^2 + 11x - 10$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Les trois identités

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$, $b = 7$: $x^2 + 14x + 49$.

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 2x$, $b = 3$: $(2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 9 = 4x^2 - 12x + 9$.

c) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = 5$, $b = x$: $25 - x^2$.

Piège. $(2x-3)^2 \neq 4x^2 - 9$: il ne faut pas oublier le double produit $-12x$.

Réponse. a) $x^2 + 14x + 49$ · b) $4x^2 - 12x + 9$ · c) $25 - x^2$.

Correction de l'exercice 4 – Factoriser avec un facteur commun

a) $6x^2 = 3x \times 2x$ et $9x = 3x \times 3$: le facteur commun est $3x$.

$$E = 3x(2x+3)$$

b) Le facteur commun est la parenthèse $(2x+1)$:

$$F = (2x+1)[(x-3)+4] = (2x+1)(x+1)$$

— Contrôle de b) en développant : $(2x+1)(x+1) = 2x^2 + 3x + 1$, et $F = 2x^2 - 5x - 3 + 8x + 4 = 2x^2 + 3x + 1$. Cohérent.

Réponse. a) $E = 3x(2x+3)$ · b) $F = (2x+1)(x+1)$.

Correction de l'exercice 5 – Factoriser avec une identité

On lit les identités remarquables **dans l'autre sens**.

a) $81 = 9^2$, donc $G = x^2 - 9^2 = (x-9)(x+9)$.

b) $9x^2 = (3x)^2$ et $25 = 5^2$, donc $H = (3x-5)(3x+5)$.

c) On teste $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$: le terme du milieu correspond, donc $K = (x-5)^2$.

Méthode. Pour une expression à trois termes, on identifie a et b grâce aux carrés, puis on **vérifie le double produit**.

Réponse. a) $(x-9)(x+9)$ · b) $(3x-5)(3x+5)$ · c) $(x-5)^2$.

Correction de l'exercice 6 – Enlever une parenthèse précédée d'un signe moins

— Pour L : $-(2x-5) = -2x + 5$, donc

$$L = 4x + 3 - 2x + 5 = 2x + 8$$

— Pour M : $3(x+2) = 3x + 6$ et $-2(4x-1) = -8x + 2$, donc

$$M = 3x + 6 - 8x + 2 = -5x + 8$$

— Contrôle numérique avec $x = 1$: $L = 7 - (-3) = 10$ et $2 \times 1 + 8 = 10$; $M = 9 - 6 = 3$ et $-5 + 8 = 3$. Les deux résultats se confirment.

Réponse. $L = 2x + 8$ et $M = -5x + 8$.

Correction de l'exercice 7 – Choisir la bonne méthode

a) **Facteur commun** $4x$: $N = 4x(x-5)$.

b) **Identité** $a^2 - b^2$ avec $a = 4$, $b = x$: $P = (4-x)(4+x)$.

c) **Identité** $(a+b)^2$: $Q = (x+4)^2$ car $8x = 2 \times x \times 4$.

d) **Identité** $a^2 - b^2$ avec $a = x - 2$ et $b = 3$:

$$R = [(x-2)-3][(x-2)+3] = (x-5)(x+1)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Contrôle de d) : $(x-5)(x+1) = x^2 - 4x - 5$, et $R = x^2 - 4x + 4 - 9 = x^2 - 4x - 5$. Cohérent.

Réponse. a) $4x(x-5)$ · b) $(4-x)(4+x)$ · c) $(x+4)^2$ · d) $(x-5)(x+1)$.

Correction de l'exercice 8 – Calcul astucieux

— a) $101^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$.

— b) $99^2 = (100-1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$.

— c) $103 \times 97 = (100+3)(100-3) = 100^2 - 3^2 = 10\,000 - 9 = 9\,991$.

— C'est exactement l'intérêt des identités : transformer un calcul difficile en additions simples.

Réponse. a) $10\,201$ · b) $9\,801$ · c) $9\,991$.

Correction de l'exercice 9 – Aire et calcul littéral

a) Le nouveau côté mesure $x+3$, donc l'aire vaut

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

b) L'aire initiale est x^2. L'augmentation est donc

$$(x^2 + 6x + 9) - x^2 = 6x + 9$$

— Interprétation géométrique : deux rectangles de $3 \times x$ (soit $6x$) et un petit carré de 3×3 (soit 9).

c) Pour $x = 10$: augmentation $= 6 \times 10 + 9 = 69$ cm².

— Contrôle : $13^2 - 10^2 = 169 - 100 = 69$ cm². Cohérent.

Réponse. a) $x^2 + 6x + 9$ · b) $6x + 9$ · c) 69 cm².

Correction de l'exercice 10 – Démontrer une propriété des nombres

On note n le plus petit des deux entiers ; le suivant est $n+1$.

— Différence des carrés :

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

— Or $2n$ est pair, donc $2n+1$ est **impair** : la propriété est démontrée pour tout entier n.

— Exemples de contrôle : $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 2 \times 4 + 1$; $11^2 - 10^2 = 21 = 2 \times 10 + 1$.

— Remarque : on obtient même tous les impairs, dans l'ordre, en faisant varier n.

Réponse. $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, qui est impair.

Correction de l'exercice 11 – Développer avec un signe moins devant un produit

On développe chaque produit séparément, puis on soustrait le second **entre parenthèses**, car le signe moins s'applique à tous ses termes.

— $(x+3)(x-2) = x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$;

— $(x-1)(x+4) = x^2 + 4x - x - 4 = x^2 + 3x - 4$.

$$E = x^2 + x - 6 - (x^2 + 3x - 4) = x^2 + x - 6 - x^2 - 3x + 4 = -2x - 2$$

Contrôle en $x = 0$: $3 \times (-2) - (-1) \times 4 = -6 + 4 = -2$, et $-2 \times 0 - 2 = -2$.

Réponse. $E = -2x - 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Factoriser par un facteur commun caché

On repère la parenthèse qui apparaît dans les deux termes.

Dans F, $(x-3)^2 = (x-3)(x-3)$: le facteur commun est $(x-3)$.

$$F = (x-3)[(x-3)+2] = (x-3)(x-1)$$

Dans G, le second terme est $(x+1)\times 1$: le facteur commun est $(x+1)$, donc $G = (x+1)(5x-1)$.

Contrôle en $x=0$: $F = 9-6 = 3$ et $(-3)\times(-1) = 3$; $G = 0-1 = -1$ et $1\times(-1) = -1$.

Réponse. $F = (x-3)(x-1)$ et $G = (x+1)(5x-1)$.

Correction de l’exercice 13 – Résoudre une équation produit

Un produit est nul si et seulement si l’un de ses facteurs est nul.

Pour $(2x-6)(x+5) = 0$: soit $2x-6=0$, d’où $x=3$; soit $x+5=0$, d’où $x=-5$.

Pour $x^2-16=0$, on factorise d’abord avec la différence de carrés :

$$x^2-16 = (x-4)(x+4) = 0 \quad \text{donc} \quad x=4 \text{ ou } x=-4$$

Vérification : $(2\times 3-6)\times 8 = 0$ et $(-4)^2-16 = 0$. **Piège** : ne garder que $x=4$ en oubliant la solution négative.

Réponse. $x=3$ ou $x=-5$ · $x=4$ ou $x=-4$.

Correction de l’exercice 14 – Problème : un rectangle et un carré

a) L’aire du rectangle est un produit d’une somme et d’une différence des mêmes termes :

$$(x+2)(x-2) = x^2-4$$

b) L’aire du carré vaut x^2. La différence vaut $x^2-(x^2-4) = 4$: le carré a toujours une aire plus grande que le rectangle, de 4 cm² exactement, quel que soit x.

Contrôle pour $x=10$: le carré mesure 100 cm² et le rectangle $12\times 8 = 96$ cm², soit 4 cm² de moins.

Réponse. a) x^2-4 · b) le carré, de 4 cm² quel que soit x.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : un programme de calcul

a) On suit les étapes : $3+4=7$, puis $7^2=49$, puis $49-16=33$.

b) Avec x au départ : $(x+4)^2-16$.

— Développé : $x^2+8x+16-16 = x^2+8x$.

— Factorisé : $x^2+8x = x(x+8)$.

— On pouvait aussi factoriser directement avec a^2-b^2 : $(x+4)^2-4^2 = [(x+4)-4][(x+4)+4] = x(x+8)$. Même résultat.

c) Un produit est nul si l’un des facteurs est nul : $x=0$ ou $x+8=0$, donc $x=0$ ou $x=-8$.

— Vérification avec $x=-8$: $(-8+4)^2-16 = 16-16 = 0$. Correct.

Réponse. a) 33 · b) $x(x+8)$ · c) $x=0$ ou $x=-8$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).