Plaquette 3 – Factoriser : facteur commun, identités et formes mixtes

Calcul littéral et identités remarquables — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

L'ordre des réflexes.

Étape	Question à se poser
1	Y a-t-il un **facteur commun** à tous les termes ?
2	Le reste est-il une **identité remarquable** ?
3	Peut-on encore factoriser ce qu'on a obtenu ?

Le facteur commun peut être une parenthèse. C'est le cas le plus difficile à voir :

$$(x+2)(x-5)+(x+2)(3x+1)=(x+2)[(x-5)+(3x+1)]=(x+2)(4x-4)$$

On termine en factorisant encore : $(x+2)\times 4(x-1)=4(x+2)(x-1)$.

Faire apparaître un facteur commun caché. Souvent, un terme isolé est en réalité un multiple du facteur :

$$(x-3)^2+5(x-3)=(x-3)[(x-3)+5]=(x-3)(x+2)$$

$$4x^2-9+(2x-3)(x+1)=(2x-3)(2x+3)+(2x-3)(x+1)=(2x-3)(3x+4)$$

Un terme seul compte comme facteur $\times 1$.

$$(x+7)(2x-1)+(x+7)=(x+7)[(2x-1)+1]=(x+7)\times 2x$$

Les trois identités, dans le sens de la factorisation.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \qquad a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \qquad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Vérifier une factorisation. Deux moyens, à utiliser systématiquement :

— **redévelopper** le produit obtenu et retrouver l'expression de départ ;
— tester une **valeur numérique** dans les deux écritures.

Piège de signe. Quand le facteur commun est précédé d'un moins, il reste un 1 :

$$3x(x-1)-(x-1)=(x-1)(3x-1)$$

et non $(x-1)\times 3x$.

Correction de l'exercice 1 – Facteur commun numérique ou littéral

Pour factoriser, on cherche le plus grand facteur commun : le PGCD des coefficients et la plus petite puissance de x présente dans tous les termes.

— $12x+18$: PGCD$(12\,;18)=6$, donc $12x+18=6(2x+3)$.
— $5x^2-15x$: le facteur commun est $5x$, donc $5x^2-15x=5x(x-3)$.
— $6x^3+9x^2$: PGCD$(6\,;9)=3$ et la plus petite puissance est x^2, donc

$$6x^3+9x^2=3x^2(2x+3)$$

Contrôle en développant : $3x^2\times 2x+3x^2\times 3=6x^3+9x^2$; et en $x=2$ pour la deuxième : $20-30=-10=10\times(-1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $6(2x+3)\cdot 5x(x-3)\cdot 3x^2(2x+3)$.

Correction de l'exercice 2 – Facteur commun en parenthèse

Les deux termes contiennent le même facteur, la parenthèse $(x+4)$. On la met en facteur et l'on regroupe ce qui reste dans un crochet :

$$(x+4)(2x-1)+(x+4)(x+3)=(x+4)[(2x-1)+(x+3)]=(x+4)(3x+2)$$

Contrôle par développement : $(x+4)(3x+2)=3x^2+14x+8$, et l'expression de départ donne $(2x^2+7x-4)+(x^2+7x+12)=3x^2+14x+8$. En $x=1$: $5\times 1+5\times 4=25=5\times 5$.

Piège : développer d'abord les deux produits ferait perdre le facteur commun.

Réponse. $(x+4)(3x+2)$.

Correction de l'exercice 3 – Un terme isolé

Première expression. Le second terme est la parenthèse seule ; on l'écrit $(2x-5)\times 1$ pour faire apparaître le facteur commun :

$$(2x-5)(x+1)-(2x-5)\times 1=(2x-5)[(x+1)-1]=x(2x-5)$$

Seconde expression. $(3x+2)^2=(3x+2)(3x+2)$, donc le facteur commun est $(3x+2)$: $(3x+2)[(3x+2)+1]=(3x+2)(3x+3)$. Comme $3x+3=3(x+1)$, on obtient $3(3x+2)(x+1)$.

Contrôle en $x=3$ pour la première : $1\times 4-1=3=3\times 1$. Oublier le « $\times 1$ » conduit souvent à écrire un crochet faux.

Réponse. $x(2x-5)\cdot 3(3x+2)(x+1)$.

Correction de l'exercice 4 – Faire apparaître une identité

Aucun facteur commun n'apparaît directement. Mais x^2-25 est une différence de carrés : $x^2-25=(x-5)(x+5)$. En la remplaçant, le facteur $(x-5)$ apparaît dans les deux termes :

$$(x-5)(x+5)+(x-5)(2x+1)=(x-5)[(x+5)+(2x+1)]=(x-5)(3x+6)$$

On factorise encore $3x+6=3(x+2)$, d'où le résultat complet $3(x-5)(x+2)$.

Contrôle en $x=0$: $-25+(-5)\times 1=-30$ et $3\times(-5)\times 2=-30$. Quand un terme est une identité, la factoriser permet souvent de révéler le facteur commun caché.

Réponse. $3(x-5)(x+2)$.

Correction de l'exercice 5 – Deux identités à repérer

$4x^2-9=(2x)^2-3^2$ est une différence de carrés, donc $4x^2-9=(2x-3)(2x+3)$.

Dans la seconde expression, on remplace $4x^2-9$ par cette forme factorisée : le facteur $(2x-3)$ apparaît deux fois.

$$(2x-3)(x+7)+(2x-3)(2x+3)=(2x-3)[(x+7)+(2x+3)]=(2x-3)(3x+10)$$

Contrôle en $x=0$: $(-3)\times 7+(-9)=-30$ et $(-3)\times 10=-30$; en $x=1$: $-8-5=-13=(-1)\times 13$. La valeur $x=1{,}5$, qui annule $2x-3$, annule toute l'expression.

Réponse. $(2x-3)(2x+3)$ puis $(2x-3)(3x+10)$.

Correction de l'exercice 6 – Factoriser complètement

On cherche d'abord un facteur commun, puis on regarde si le reste est une identité remarquable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$5x^2 - 45 = 5(x^2 - 9)$, et $x^2 - 9$ est une différence de carrés, donc $5x^2 - 45 = 5(x - 3)(x + 3)$.

$2x^2 + 16x + 32 = 2(x^2 + 8x + 16)$, et $x^2 + 8x + 16$ est un carré parfait, car $16 = 4^2$ et $8x = 2 \times x \times 4$:

$$2x^2 + 16x + 32 = 2(x + 4)^2$$

Contrôle en $x = 4$: $80 - 45 = 35 = 5 \times 1 \times 7$; en $x = 1$: $2 + 16 + 32 = 50 = 2 \times 25$.

Réponse. $5(x - 3)(x + 3) \cdot 2(x + 4)^2$.

Correction de l’exercice 7 – Équation produit simple

Un produit est nul si et seulement si l’un de ses facteurs est nul.

Pour $(x - 3)(2x + 7) = 0$: soit $x - 3 = 0$, d’où $x = 3$; soit $2x + 7 = 0$, d’où $2x = -7$ et $x = -3{,}5$.

Pour $x(x - 5) = 0$: soit $x = 0$, soit $x - 5 = 0$, d’où $x = 5$.

$$x = 3 \text{ ou } x = -3{,}5 \qquad x = 0 \text{ ou } x = 5$$

Vérification : en $x = -3{,}5$, $(-6{,}5) \times 0 = 0$. **Piège fréquent** : oublier la solution $x = 0$, parce que le facteur x seul ne ressemble pas à une parenthèse.

Réponse. $x = 3$ ou $x = -3{,}5 \cdot x = 0$ ou $x = 5$.

Correction de l’exercice 8 – Factoriser pour résoudre

Pour résoudre une équation de ce type, on ramène tout dans un membre, on factorise, puis on utilise la propriété du produit nul.

$x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$, donc l’équation devient $(x - 7)(x + 7) = 0$: $x = 7$ ou $x = -7$.

$3x^2 = 12x$ équivaut à $3x^2 - 12x = 0$, soit $3x(x - 4) = 0$:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 4$$

Erreur grave à éviter : diviser les deux membres de $3x^2 = 12x$ par x ferait perdre la solution $x = 0$. On ne divise jamais par une expression qui peut être nulle.

Réponse. $x = 7$ ou $x = -7 \cdot x = 0$ ou $x = 4$.

Correction de l’exercice 9 – Une équation à factoriser en deux temps

Les deux termes contiennent $(x + 2)$, puisque $(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$. On met ce facteur en évidence, en faisant attention au signe moins devant le second crochet :

$$(x + 2)[(x + 2) - (3x - 1)] = (x + 2)(x + 2 - 3x + 1) = (x + 2)(-2x + 3)$$

L’équation devient $(x + 2)(-2x + 3) = 0$: soit $x + 2 = 0$, d’où $x = -2$; soit $-2x + 3 = 0$, d’où $x = 1{,}5$.

Vérification en $x = 1{,}5$: $3{,}5^2 - 3{,}5 \times 3{,}5 = 0$. **Piège** : oublier de changer le signe de -1 donnerait le crochet $-2x + 1$ et la fausse solution $x = 0{,}5$.

Réponse. $x = -2$ ou $x = 1{,}5$.

Correction de l’exercice 10 – Aire d’un rectangle factorisée

L’aire est le produit de la longueur par la largeur :

$$A(x) = (x + 5)(x - 2) = x^2 - 2x + 5x - 10 = x^2 + 3x - 10$$

On veut $A(x) = 60$. Le membre de droite n’étant pas nul, on ramène tout à gauche : $x^2 + 3x - 70 = 0$. On cherche deux nombres de produit -70 et de somme 3 : 10 et -7

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

conviennent, donc $x^2 + 3x - 70 = (x + 10)(x - 7)$ et l'équation donne $x = -10$ ou $x = 7$.

L'énoncé impose $x > 2$ (sinon la largeur serait négative ou nulle) : on retient $x = 7$. Le rectangle mesure alors 12 sur 5, et son aire vaut bien 60.

Réponse. $A(x) = x^2 + 3x - 10$, et $x = 7$ (rectangle 12×5).

Correction de l'exercice 11 – Reconnaître la bonne méthode

— $7x^2 - 7$: on met d'abord le facteur commun 7, puis on reconnaît une différence de carrés : $7(x^2 - 1) = 7(x - 1)(x + 1)$.
— $x^2 + 18x + 81$: c'est un carré parfait, car $81 = 9^2$ et $18x = 2 \times x \times 9$; donc $(x + 9)^2$.
— $(x - 1)(x + 6) + 3(x - 1)$: le facteur commun est la parenthèse $(x - 1)$:

$$(x - 1)[(x + 6) + 3] = (x - 1)(x + 9)$$

Contrôles : en $x = 2$, $28 - 7 = 21 = 7 \times 1 \times 3$; en $x = 0$, $-6 - 3 = -9 = (-1) \times 9$. On a utilisé un facteur commun numérique suivi d'une identité, une identité seule, puis un facteur commun en parenthèse.

Réponse. $7(x - 1)(x + 1) \cdot (x + 9)^2 \cdot (x - 1)(x + 9)$.

Correction de l'exercice 12 – Simplifier une fraction littérale

On ne peut simplifier une fraction que par un **facteur** commun au numérateur et au dénominateur : on factorise donc le numérateur.

$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$, d'où, pour $x \neq -4$,

$$\frac{x^2 - 16}{x + 4} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x + 4} = x - 4$$

$3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$, d'où, pour $x \neq 4$, $\dfrac{3x(x - 4)}{x - 4} = 3x$.

Contrôle en $x = 6$: $\dfrac{20}{10} = 2 = 6 - 4$. **Piège** : « simplifier » $\dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$ en $x^2 - 4$ est faux, car on ne simplifie jamais les termes d'une somme. Les conditions sur x évitent la division par zéro.

Réponse. $x - 4 \cdot 3x$.

Correction de l'exercice 13 – Démontrer avec une factorisation

Premier nombre. $9 = 3^2$ et $6n = 2 \times n \times 3$: c'est un carré parfait,

$$n^2 + 6n + 9 = (n + 3)^2$$

C'est le carré de l'entier $n + 3$. Par exemple, pour $n = 5$: $25 + 30 + 9 = 64 = 8^2$.

Second nombre. On cherche deux nombres de produit 8 et de somme 6 : 2 et 4. Donc $n^2 + 6n + 8 = (n + 2)(n + 4)$, produit de deux entiers dont la différence vaut $(n + 4) - (n + 2) = 2$. Pour $n = 5$: $63 = 7 \times 9$.

On remarque que $n^2 + 6n + 9 = (n^2 + 6n + 8) + 1$: le produit de deux entiers de différence 2, augmenté de 1, est un carré.

Réponse. $(n + 3)^2$ est un carré parfait ; $(n + 2)(n + 4)$ est un produit de deux entiers distants de 2.

Correction de l'exercice 14 – Résoudre une équation avec identité

On ramène chaque équation à « … = 0 », puis on factorise une différence de carrés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$(x+3)^2 = 25$ équivaut à $(x+3)^2 - 5^2 = 0$, soit $[(x+3)-5][(x+3)+5] = (x-2)(x+8) = 0$: $x = 2$ ou $x = -8$.

$(2x-1)^2 = (x+4)^2$ équivaut à $A^2 - B^2 = 0$ avec $A = 2x-1$ et $B = x+4$. Alors $A - B = x - 5$ et $A + B = 3x + 3$:

$$(x-5)(3x+3) = 0 \quad \text{donc} \quad x = 5 \text{ ou } x = -1$$

Vérification : pour $x = -1$, $(-3)^2 = 9 = 3^2$. **Piège** : de $A^2 = B^2$, on ne déduit pas seulement $A = B$; on peut aussi avoir $A = -B$.

Réponse. $x = 2$ ou $x = -8$ · $x = 5$ ou $x = -1$.

Correction de l’exercice 15 – Volume et factorisation

Le volume est le produit des trois dimensions. Les deux dernières forment un produit d’une somme et d’une différence :

$$V(x) = x(x+2)(x-2) = x(x^2-4) = x^3 - 4x$$

Pour $x = 5$: $V(5) = 125 - 20 = 105$, ce que confirment les dimensions $5 \times 7 \times 3 = 105$.

Pour $V(x) = 96$, on procède par essais : $V(4) = 48$ est trop petit et $V(5) = 105$ trop grand, puis $V(4{,}8) \approx 91{,}4$ et $V(4{,}9) \approx 98{,}0$. La solution est donc entre 4,8 et 4,9 ; on trouve $x \approx 4{,}87$, puisque $V(4{,}87) \approx 96{,}0$. Cette équation n’a pas de solution entière.

Réponse. $V(x) = x^3 - 4x$, $V(5) = 105$, et $x \approx 4{,}87$ pour un volume de 96.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : une expression à étudier

a) On développe chaque terme : $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$ et $(3x-2)(x+5) = 3x^2 + 13x - 10$. On soustrait en changeant tous les signes de la seconde parenthèse :

$$E = 9x^2 - 12x + 4 - 3x^2 - 13x + 10 = 6x^2 - 25x + 14$$

b) Le facteur commun est $(3x-2)$: $E = (3x-2)[(3x-2) - (x+5)] = (3x-2)(2x-7)$. En développant, on retrouve $6x^2 - 25x + 14$.

c) Pour $x = 2$: $6 \times 4 - 50 + 14 = -12$, et $(6-2)(4-7) = 4 \times (-3) = -12$.

d) Pour résoudre $E = 0$, on utilise la forme factorisée : $3x - 2 = 0$ ou $2x - 7 = 0$, donc $x = \frac{2}{3}$ ou $x = 3{,}5$.

Réponse. a) $6x^2 - 25x + 14$ · b) $(3x-2)(2x-7)$ · c) $E = -12$ · d) $x = \frac{2}{3}$ ou $x = 3{,}5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).