Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : mise en équation et modélisation

Calcul littéral et identités remarquables — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les quatre temps d'un problème.

Temps	Ce qu'on écrit
choisir l'inconnue	« Soit x le nombre de … » avec l'unité
modéliser	traduire chaque donnée en expression de x
transformer	développer ou factoriser selon le but
conclure	répondre en français, avec l'unité

Choisir la bonne transformation.

But visé	Transformation
comparer deux expressions	développer les deux, puis soustraire
résoudre une équation	factoriser vers un produit nul
prouver une divisibilité	factoriser pour isoler le diviseur
prouver un signe ou un maximum	faire apparaître un carré
calculer une valeur	remplacer dans la forme la plus simple

Les formules disponibles.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Équation produit. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Vérifier ses solutions dans le contexte. Une longueur négative, un effectif décimal ou un prix nul se rejettent **après** le calcul, en le disant explicitement.

Grandeurs usuelles. Aire d'un rectangle $L\ell$, d'un carré c^2, d'un disque πr^2 ; volume d'un pavé $L\ell h$, d'un cube c^3 ; périmètre d'un rectangle $2(L+\ell)$.

Correction de l'exercice 1 – Le jardin agrandi

a) Le nouveau jardin est un carré de côté $x+3$, d'aire $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$. On peut aussi découper la nouvelle surface : l'ancien carré (x^2), deux bandes de 3 m sur x m ($2 \times 3x = 6x$) et un petit carré de 3 m de côté dans le coin (9). On retrouve

$$x^2 + 6x + 9$$

Ce découpage illustre l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

b) L'augmentation vaut $(x+3)^2 - x^2 = 6x + 9$. Pour $x = 12$: $6 \times 12 + 9 = 81$ m². **Contrôle** : l'aire passe de 144 m² à $15^2 = 225$ m², soit 81 m² de plus.

Réponse. a) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ · b) +81 m² (de 144 à 225 m²).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Le carré de carton

Le carré initial a une aire de x^2 cm². On enlève quatre carrés de 4 cm de côté, soit $4 \times 16 = 64$ cm². L’aire restante vaut

$$A(x) = x^2 - 64 = (x - 8)(x + 8)$$

(différence de carrés, avec $64 = 8^2$).

Pour $x = 20$: $400 - 64 = 336$ cm², et la forme factorisée donne aussi $12 \times 28 = 336$. **Condition** : les quatre découpes ne doivent pas se chevaucher, il faut $x > 8$; pour $x = 8$, les quatre petits carrés rempliraient tout le carton.

Réponse. $A(x) = x^2 - 64 = (x - 8)(x + 8)$, soit 336 cm² pour $x = 20$.

Correction de l’exercice 3 – Deux abonnements

On note x le nombre de séances. La salle A coûte $40 + 3x$ euros et la salle B $10 + 6x$ euros. Les deux prix sont égaux quand

$$40 + 3x = 10 + 6x \quad \text{soit} \quad 30 = 3x \quad \text{donc} \quad x = 10$$

Pour 10 séances, les deux salles coûtent 70 € (40 + 30 et 10 + 60).

La différence des prix vaut $(40 + 3x) - (10 + 6x) = 30 - 3x$: elle est positive pour $x < 10$, donc en dessous de 10 séances la salle B est moins chère (40 € contre 55 € pour 5 séances) ; au-dessus, c’est la salle A (100 € contre 130 € pour 20 séances).

Réponse. 10 séances, à 70 € ; en dessous la salle B est moins chère, au-dessus la salle A.

Correction de l’exercice 4 – L’aire du chemin

Le chemin entoure le bassin : il s’ajoute des deux côtés, donc l’ensemble mesure $8 + 2x$ sur $5 + 2x$. L’aire du chemin est l’aire totale moins celle du bassin :

$$C(x) = (8 + 2x)(5 + 2x) - 40 = 40 + 16x + 10x + 4x^2 - 40 = 4x^2 + 26x$$

On peut la factoriser : $C(x) = 2x(2x + 13)$.

Pour $x = 1{,}5$: $4 \times 2{,}25 + 26 \times 1{,}5 = 9 + 39 = 48$ m². **Contrôle** : l’ensemble mesure 11 m sur 8 m, soit 88 m², et $88 - 40 = 48$ m².

Réponse. $C(x) = 4x^2 + 26x = 2x(2x + 13)$, soit 48 m² pour $x = 1{,}5$ m.

Correction de l’exercice 5 – Le nombre de départ

On note x le nombre de départ. Le programme donne $(x + 5)^2 - x^2$, que l’on développe :

$$(x + 5)^2 - x^2 = x^2 + 10x + 25 - x^2 = 10x + 25$$

On résout $10x + 25 = 105$: $10x = 80$, donc $x = 8$.

Vérification : $13^2 - 8^2 = 169 - 64 = 105$. On pouvait aussi factoriser la différence de carrés : $(x + 5 - x)(x + 5 + x) = 5(2x + 5)$, puis résoudre $5(2x + 5) = 105$, soit $2x + 5 = 21$ et $x = 8$.

Réponse. $x = 8$: $13^2 - 8^2 = 169 - 64 = 105$.

Correction de l’exercice 6 – Deux entiers de somme 30

On note a et b les deux entiers, avec $a + b = 30$ et $a^2 - b^2 = 180$. La différence de carrés se factorise, ce qui fait apparaître la somme connue :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 30(a - b) = 180$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc $a - b = 6$. On connaît alors la somme et la différence : en les additionnant, $2a = 36$, d'où $a = 18$, puis $b = 30 - 18 = 12$.

Contrôle : $18 + 12 = 30$ et $18^2 - 12^2 = 324 - 144 = 180$. L'identité évite de résoudre une équation plus compliquée.

Réponse. 18 et 12 : $(a - b) \times 30 = 180$ donne $a - b = 6$.

Correction de l'exercice 7 – La bande de terrain

a) Après avoir retiré la bande, le terrain mesure $50 - x$ sur $30 - x$ (avec $0 \leq x < 30$) :

$$A(x) = (50 - x)(30 - x) = 1500 - 50x - 30x + x^2 = x^2 - 80x + 1500$$

b) On veut $A(x) = 1196$, soit $x^2 - 80x + 304 = 0$. On cherche deux nombres de produit 304 et de somme 80 : 4 et 76 conviennent ($4 \times 76 = 304$), donc l'équation s'écrit $(x - 4)(x - 76) = 0$. La solution $x = 76$ est impossible, la bande serait plus large que le terrain : on retient $x = 4$ m.

Contrôle : le terrain mesure alors 46 m sur 26 m, et $46 \times 26 = 1196$ m².

Réponse. a) $A(x) = x^2 - 80x + 1500$ · b) $(x - 40)^2 = 1296$ donne $x = 4$ m (terrain de 46 m sur 26 m).

Correction de l'exercice 8 – Prix, hausse et baisse

Une hausse de 20 % multiplie le prix par 1,2, une baisse de 20 % le multiplie par 0,8. Le prix final vaut donc

$$1{,}2 \times 0{,}8 \times p = 0{,}96p$$

Comme $0{,}96 < 1$, le prix final est toujours inférieur au prix initial : la baisse globale est de 4 %.

On reconnaît une identité : $1{,}2 \times 0{,}8 = (1 + 0{,}2)(1 - 0{,}2) = 1 - 0{,}2^2 = 0{,}96$. Pour un taux t non nul, le coefficient global $1 - t^2$ est toujours inférieur à 1. **Contrôle** avec $p = 50$: 60 € après la hausse, puis 48 € après la baisse, soit 4 % de moins. L'ordre des deux évolutions ne change rien.

Réponse. Prix final $0{,}96p = (1 - 0{,}2^2)p$: baisse globale de 4 %, quel que soit p.

Correction de l'exercice 9 – Trois nombres consécutifs

On centre les trois entiers sur celui du milieu : $n - 1$, n et $n + 1$. Le produit des deux extrêmes est un produit d'une somme et d'une différence : $(n - 1)(n + 1) = n^2 - 1$. Le total vaut donc

$$n(n^2 - 1) + n = n^3 - n + n = n^3$$

On cherche n tel que $n^3 = 1000$: comme $10^3 = 1000$, $n = 10$, et les trois entiers sont 9, 10 et 11.

Contrôle : $9 \times 10 \times 11 = 990$, et $990 + 10 = 1000$. Le cube augmente avec n, donc il n'y a pas d'autre solution.

Réponse. Le total vaut n^3 ; $n^3 = 1000$ donne $n = 10$, soit 9, 10 et 11.

Correction de l'exercice 10 – Le cadre de photo

Le cadre mesure 2 cm de chaque côté, donc l'ensemble est un carré de côté $c + 4$. L'aire du cadre est la différence des aires :

$$(c + 4)^2 - c^2 = c^2 + 8c + 16 - c^2 = 8c + 16$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On résout $8c + 16 = 80$: $8c = 64$, donc $c = 8$ cm.

Contrôle : l'ensemble mesure 12 cm de côté, soit 144 cm² ; la photo 64 cm² ; le cadre $144 - 64 = 80$ cm². L'aire du cadre est une expression du premier degré en c : elle augmente régulièrement avec la taille de la photo.

Réponse. $c = 8$ cm : le cadre a une aire de $8c + 16 = 80$ cm².

Correction de l'exercice 11 – L'équation produit

On passe tout dans le premier membre pour faire apparaître une différence de carrés $A^2 - B^2$, avec $A = 2x - 6$ et $B = x + 1$:

$$(2x - 6)^2 - (x + 1)^2 = (A - B)(A + B) = (x - 7)(3x - 5)$$

L'équation devient $(x - 7)(3x - 5) = 0$: soit $x - 7 = 0$, d'où $x = 7$; soit $3x - 5 = 0$, d'où $x = \frac{5}{3}$.

Vérification : pour $x = 7$, $8^2 = 64 = 8^2$; pour $x = \frac{5}{3}$, $2x - 6 = -\frac{8}{3}$ et $x + 1 = \frac{8}{3}$, qui ont le même carré. **Piège** : écrire $2x - 6 = x + 1$ ne donnerait que la solution 7 ; deux carrés égaux peuvent avoir des bases opposées.

Réponse. $(x - 7)(3x - 5) = 0$, donc $x = 7$ ou $x = \frac{5}{3}$.

Correction de l'exercice 12 – Le triangle rectangle

D'après le théorème de Pythagore, le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés :

$$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 9)^2$$

On développe : $x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 18x + 81$, puis on regroupe tout à gauche : $x^2 - 4x - 32 = 0$. On cherche deux nombres de produit -32 et de somme -4 : -8 et 4, d'où $(x - 8)(x + 4) = 0$, soit $x = 8$ ou $x = -4$. Une longueur est positive : $x = 8$.

Le triangle a pour côtés 8, 15 et 17. **Contrôle** : $64 + 225 = 289 = 17^2$.

Réponse. $x = 8$: le triangle a pour côtés 8, 15 et 17.

Correction de l'exercice 13 – Deux carrés accolés

La différence des aires est une différence de carrés :

$$(x + 4)^2 - x^2 = (x + 4 - x)(x + 4 + x) = 4(2x + 4) = 8x + 16$$

On résout $8x + 16 = 96$: $8x = 80$, donc $x = 10$. Les côtés mesurent 10 cm et 14 cm ; **contrôle** : $196 - 100 = 96$ cm².

Les périmètres valent 40 cm et 56 cm, soit une différence de 16 cm. En général, $4(x + 4) - 4x = 16$: la différence des périmètres ne dépend pas de x, contrairement à celle des aires.

Réponse. 10 cm et 14 cm ; la différence des périmètres vaut 16 cm, indépendamment de x.

Correction de l'exercice 14 – Le volume de la boîte

a) La boîte n'a pas de couvercle : il faut le fond, d'aire x^2, et quatre faces latérales de 5 cm sur x cm, d'aire $5x$ chacune.

$$A(x) = x^2 + 4 \times 5x = x^2 + 20x$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On résout $x^2 + 20x = 384$, soit $x^2 + 20x - 384 = 0$. On cherche deux nombres de produit -384 et de somme 20 : 32 et -12 conviennent ($384 = 12 \times 32$). Donc $(x - 12)(x + 32) = 0$, et comme un côté est positif, $x = 12$ cm.

Contrôle : $144 + 240 = 384$ cm². Le volume vaut alors $144 \times 5 = 720$ cm³, soit 0,72 L.

Réponse. a) $A(x) = x^2 + 20x$ · b) $x = 12$ cm et $V = 720$ cm³.

Correction de l’exercice 15 – Le partage du champ

a) Le demi-périmètre vaut 60 m, donc la largeur mesure $60 - x$ (avec $0 < x < 60$). La clôture intérieure ne change pas l’aire totale :

$$A(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$$

b) On compare l’aire à 900 : $900 - A(x) = x^2 - 60x + 900$. C’est un carré parfait, car $900 = 30^2$ et $60x = 2 \times x \times 30$: $900 - A(x) = (x - 30)^2 \geq 0$.

L’aire ne dépasse donc jamais 900 m², et elle vaut 900 m² pour $x = 30$ m : le champ est alors un carré. **Contrôle** : pour $x = 40$ (ou $x = 20$), l’aire vaut 800 m², moins que 900.

Réponse. a) $A(x) = 60x - x^2$ · b) $A(x) = 900 - (x - 30)^2$: maximum 900 m² pour $x = 30$ m.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : le dallage

a) La bande de 1 m sur deux côtés adjacents fait de l’ensemble un carré de côté $x + 1$, d’aire $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

b) L’aire des dalles est ce qui s’ajoute à la terrasse :

$$(x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$$

Géométriquement : deux bandes de x m² et un carré de 1 m² dans le coin.

c) On résout $2x + 1 = 27$: $x = 13$ m. La terrasse mesure $13^2 = 169$ m² ; **contrôle** : $14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27$ m².

d) La terrasse représente $\dfrac{169}{196} \approx 0{,}862$ de l’ensemble, soit environ 86,2 %. Plus la terrasse est grande, plus cette part augmente : pour $x = 3$, elle ne vaut que $\dfrac{9}{16} \approx 56\,\%$.

Réponse. a) $(x + 1)^2$ · b) $(x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$ · c) $x = 13$ m, terrasse de 169 m² · d) environ 86,2 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).