Plaquette 2 – Les trois identités remarquables : reconnaître et appliquer

Calcul littéral et identités remarquables — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois identités.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Identifier a et b. C'est l'étape décisive : on regarde ce qui est **au carré**.

Expression	a	b	Résultat
$(x+5)^2$	x	5	$x^2+10x+25$
$(3x-2)^2$	$3x$	2	$9x^2-12x+4$
$(2x-7)(2x+7)$	$2x$	7	$4x^2-49$
$(5-x)^2$	5	x	$25-10x+x^2$

Attention aux coefficients. $(3x)^2 = 9x^2$ et non $3x^2$: le carré porte sur **tout** le terme.

Reconnaître une forme factorisable.

Forme développée	Indice	Factorisation
x^2-64	différence de deux carrés	$(x-8)(x+8)$
$x^2+12x+36$	$36=6^2$ et $12x=2\times x\times 6$	$(x+6)^2$
$x^2-10x+25$	$25=5^2$ et $-10x=-2\times x\times 5$	$(x-5)^2$
$4x^2-9$	$4x^2=(2x)^2$ et $9=3^2$	$(2x-3)(2x+3)$

Le test du double produit. Pour savoir si x^2+bx+c est un carré, on vérifie que c est un carré parfait k^2 **et** que $b = \pm 2k$. Sinon, ce n'est pas une identité.

Ce qui ne se factorise pas avec ces identités. x^2+9 n'est **pas** factorisable : c'est une **somme** de carrés, pas une différence.

Erreurs classiques à éviter.

$$(a+b)^2 \neq a^2+b^2 \qquad (a-b)^2 \neq a^2-b^2 \qquad \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$$

Le terme $2ab$, appelé **double produit**, est celui qu'on oublie le plus souvent.

Correction de l'exercice 1 – Développer trois carrés

On applique $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ ou $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ en repérant bien a et b.

— $(x+7)^2$: $a=x$, $b=7$, d'où $x^2+2\times x\times 7+49 = x^2+14x+49$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $(2x-5)^2$: $a=2x$, $b=5$; le carré de $2x$ vaut $4x^2$ et le double produit $2\times 2x\times 5=20x$, d'où $4x^2-20x+25$.
— $(3-4x)^2$: $a=3$, $b=4x$, d'où

$$(3-4x)^2=9-24x+16x^2$$

Contrôle en $x=1$: $8^2=64=1+14+49$; $(-3)^2=9=4-20+25$; $(-1)^2=1=9-24+16$.

Réponse. $x^2+14x+49\cdot 4x^2-20x+25\cdot 9-24x+16x^2$.

Correction de l'exercice 2 – Produits conjugués

Chaque expression est le produit d'une différence et d'une somme des mêmes termes : on applique $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

— $(x-9)(x+9)$: $a=x$, $b=9$, donc x^2-81.
— $(3x+4)(3x-4)$: $a=3x$, $b=4$, donc $9x^2-16$.
— $(7-2x)(7+2x)$: $a=7$, $b=2x$, donc

$$(7-2x)(7+2x)=49-4x^2$$

Le résultat n'a que deux termes, car les doubles produits s'annulent : $(x-9)(x+9)=x^2+9x-9x-81$. **Contrôle** en $x=10$: $1\times 19=19=100-81$.

Réponse. $x^2-81\cdot 9x^2-16\cdot 49-4x^2$.

Correction de l'exercice 3 – Reconnaître l'identité à utiliser

On regarde la forme de l'expression : un **carré** d'une somme ou d'une différence donne trois termes, un **produit** d'une somme et d'une différence des mêmes termes en donne deux.

— $(5+x)^2$ est le carré d'une somme, avec $a=5$ et $b=x$: $25+10x+x^2$.
— $(x-1)(x+1)$ est un produit $(a-b)(a+b)$ avec $a=x$ et $b=1$: x^2-1.
— $(4x+3)^2$ est le carré d'une somme, avec $a=4x$ et $b=3$: le double produit vaut $2\times 4x\times 3=24x$, donc

$$(4x+3)^2=16x^2+24x+9$$

Contrôle en $x=1$: $7^2=49=16+24+9$.

Réponse. $25+10x+x^2\cdot x^2-1\cdot 16x^2+24x+9$.

Correction de l'exercice 4 – Factoriser une différence de carrés

Chaque expression est une différence de deux carrés : on écrit chaque terme comme un carré, puis on applique $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

— $x^2-36=x^2-6^2=(x-6)(x+6)$.
— $49-y^2=7^2-y^2=(7-y)(7+y)$.
— $16x^2-25=(4x)^2-5^2$, donc

$$16x^2-25=(4x-5)(4x+5)$$

Contrôle en $x=2$: $64-25=39$ et $3\times 13=39$. **Attention** : une **somme** de carrés comme x^2+36 ne se factorise pas de cette façon.

Réponse. $(x-6)(x+6)\cdot(7-y)(7+y)\cdot(4x-5)(4x+5)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Factoriser un carré parfait

Une expression à trois termes est un carré parfait quand deux termes sont des carrés a^2 et b^2 et que le troisième est le double produit $2ab$.

— $x^2+16x+64$: $64=8^2$ et $2\times x\times 8=16x$, donc c'est $(x+8)^2$.
— $x^2-14x+49$: $49=7^2$ et $2\times x\times 7=14x$, avec un signe moins, donc c'est $(x-7)^2$.
— $9x^2+30x+25$: $9x^2=(3x)^2$, $25=5^2$ et $2\times 3x\times 5=30x$, donc

$$9x^2+30x+25=(3x+5)^2$$

Contre-exemple : $x^2+10x+16$ n'est pas un carré parfait, car $16=4^2$ mais $2\times x\times 4=8x\neq 10x$.

Réponse. $(x+8)^2\cdot(x-7)^2\cdot(3x+5)^2$.

Correction de l'exercice 6 – Calcul astucieux

On écrit chaque nombre à partir de 100, puis on applique une identité remarquable.

— $102^2=(100+2)^2=10\,000+2\times 100\times 2+4=10\,404$.
— $98^2=(100-2)^2=10\,000-400+4=9604$.
— $103\times 97=(100+3)(100-3)=100^2-3^2$, donc

$$103\times 97=10\,000-9=9991$$

Contrôle : $102^2-98^2=10\,404-9604=800$, et par la différence de carrés, $(102-98)(102+98)=4\times 200=800$.

Réponse. $102^2=10\,404\cdot 98^2=9604\cdot 103\times 97=9991$.

Correction de l'exercice 7 – Développer puis réduire

On développe chaque carré, puis on soustrait en faisant attention au signe moins devant la seconde parenthèse : il change le signe de tous ses termes.

$$(x+4)^2-(x-3)^2=x^2+8x+16-(x^2-6x+9)=x^2+8x+16-x^2+6x-9$$

Les x^2 s'annulent ; il reste $14x+7$, que l'on peut écrire $7(2x+1)$.

Autre méthode : c'est une différence de carrés A^2-B^2 avec $A=x+4$ et $B=x-3$. Alors $A-B=7$ et $A+B=2x+1$, et l'on retrouve $7(2x+1)$. **Contrôle** en $x=1$: $25-4=21=14+7$.

Réponse. $14x+7$, soit $7(2x+1)$.

Correction de l'exercice 8 – Factoriser après développement

Chaque expression est une différence de deux carrés, a^2-b^2, dont le premier est le carré d'une parenthèse.

Pour $(x+2)^2-9$: $a=x+2$ et $b=3$. Alors $a-b=x-1$ et $a+b=x+5$, donc

$$(x+2)^2-9=(x-1)(x+5)$$

Pour $(2x-1)^2-16$: $a=2x-1$ et $b=4$, d'où $(2x-5)(2x+3)$.

Contrôle en $x=3$: $25-9=16$ et $2\times 8=16$; en $x=1$: $1-16=-15$ et $(-3)\times 5=-15$. Développer d'abord donnerait $4x^2-4x-15$, beaucoup plus difficile à factoriser.

Réponse. $(x-1)(x+5)\cdot(2x-5)(2x+3)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Compléter une identité

Première égalité. $25 = 5^2$, donc la parenthèse est $(x + 5)$, et le terme du milieu est le double produit $2 \times x \times 5 = 10x$:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

Seconde égalité. $4x^2 = (2x)^2$, donc la parenthèse commence par $2x$. Le terme du milieu $-12x$ est égal à $-2 \times 2x \times b = -4bx$, donc $b = 3$, et le terme constant vaut $b^2 = 9$: $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$.

Contrôle en $x = 1$: $1 + 10 + 25 = 36 = 6^2$ et $4 - 12 + 9 = 1 = (-1)^2$.

Réponse. $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ et $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$.

Correction de l'exercice 10 – Deux carrés consécutifs

On note n et $n + 1$ les deux entiers consécutifs. On développe le premier carré :

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

$2n + 1$ est un nombre pair plus 1 : la différence est **impaire**. De plus, la somme des deux entiers vaut $n + (n + 1) = 2n + 1$: la différence des carrés est bien égale à leur somme.

Contrôle avec 7 et 8 : $64 - 49 = 15 = 7 + 8$. On peut aussi factoriser : $(n + 1 - n)(n + 1 + n) = 1 \times (2n + 1)$. Conséquence : tout nombre impair est une différence de deux carrés, par exemple $21 = 11^2 - 10^2$.

Réponse. $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, qui est impair et vaut bien $n + (n + 1)$.

Correction de l'exercice 11 – Aire d'un carré agrandi

L'aire initiale vaut x^2 cm². Le nouveau côté mesure $x + 3$ cm, donc la nouvelle aire vaut

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

L'augmentation d'aire est la différence : $x^2 + 6x + 9 - x^2 = 6x + 9$ cm². Pour $x = 10$, elle vaut $6 \times 10 + 9 = 69$ cm².

Contrôle : $13^2 - 10^2 = 169 - 100 = 69$ cm². Géométriquement, l'aire ajoutée se compose de deux rectangles de 3 sur x (soit $6x$) et d'un carré de 3 sur 3 (soit 9). Augmenter le côté de 30 % augmente l'aire de 69 %, car $1{,}3^2 = 1{,}69$.

Réponse. Nouvelle aire $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, augmentation $6x + 9$ — soit 69 cm² pour $x = 10$.

Correction de l'exercice 12 – Corriger des erreurs

a) Le double produit a été oublié. Avec $a = x$ et $b = 5$:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 25 = x^2 + 10x + 25$$

En $x = 1$, l'égalité fausse donne 26 alors que $6^2 = 36$.

b) Le carré de $2x$ vaut $(2x)^2 = 4x^2$, et non $2x^2$: le carré porte sur tout le terme. Donc $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$.

c) Le produit d'une différence et d'une somme donne une **différence** de carrés : $(x - 4)(x + 4) = x^2 - 16$. En $x = 5$: $1 \times 9 = 9 = 25 - 16$.

Tester une valeur numérique permet de détecter chacune de ces erreurs.

Réponse. a) $x^2 + 10x + 25$ · b) $4x^2 - 12x + 9$ · c) $x^2 - 16$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Une expression à factoriser complètement

On cherche d'abord un facteur commun, puis on regarde si ce qui reste se factorise encore.

Dans $2x^2 - 32$, le facteur commun est 2 : $2(x^2 - 16)$. Or $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$ est une différence de carrés, donc $2x^2 - 32 = 2(x - 4)(x + 4)$.

Dans $3x^2 + 12x + 12$, le facteur commun est 3 : $3(x^2 + 4x + 4)$. Or $x^2 + 4x + 4$ est un carré parfait, car $4 = 2^2$ et $4x = 2 \times x \times 2$:

$$3x^2 + 12x + 12 = 3(x + 2)^2$$

Contrôle en $x = 1$: $3 + 12 + 12 = 27 = 3 \times 9$. Oublier le facteur commun bloque la factorisation, car $2x^2$ n'est pas le carré d'un monôme simple.

Réponse. $2(x - 4)(x + 4) \cdot 3(x + 2)^2$.

Correction de l'exercice 14 – Identité et nombres

Une différence de deux carrés se factorise : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Il suffit alors de multiplier la différence par la somme, ce qui est bien plus simple que de calculer les carrés.

$$37^2 - 27^2 = (37 - 27)(37 + 27) = 10 \times 64 = 640$$

$$2026^2 - 2024^2 = (2026 - 2024)(2026 + 2024) = 2 \times 4050 = 8100$$

Contrôle du premier : $37^2 = 1369$ et $27^2 = 729$, et $1369 - 729 = 640$. Le second évite deux multiplications à quatre chiffres.

Réponse. $37^2 - 27^2 = 10 \times 64 = 640$ et $2026^2 - 2024^2 = 2 \times 4050 = 8100$.

Correction de l'exercice 15 – Deux expressions égales ?

Pour savoir si deux expressions sont égales pour **tout** x, on développe et on compare ; des essais numériques ne suffisent pas à le prouver.

$$A = (x + 3)^2 - (x + 1)^2 = x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 2x + 1) = x^2 + 6x + 9 - x^2 - 2x - 1$$

Les x^2 s'annulent, et il reste $A = 4x + 8 = B$. Les deux expressions sont donc égales pour tout x.

Autre méthode : A est une différence de carrés,
$[(x + 3) - (x + 1)][(x + 3) + (x + 1)] = 2(2x + 4) = 4x + 8$. **Contrôle** en $x = 2$:
$25 - 9 = 16 = 4 \times 2 + 8$.

Réponse. Oui : A se développe en $4x + 8$, donc $A = B$ pour tout x.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : un programme de calcul

a) En partant de 3 : $3 + 4 = 7$, $7^2 = 49$, $49 - 3^2 = 40$, puis $40 - 16 = 24$. En partant de 10 : $14^2 = 196$, $196 - 100 = 96$, puis $96 - 16 = 80$.

b) Avec x au départ, le programme donne $(x + 4)^2 - x^2 - 16$. On développe :

$$x^2 + 8x + 16 - x^2 - 16 = 8x$$

c) Le résultat vaut toujours $8x$: le programme **multiplie par** 8 le nombre de départ, ce que confirment $8 \times 3 = 24$ et $8 \times 10 = 80$.

d) On résout $8x = 96$, d'où $x = 12$. **Vérification** : $16^2 - 12^2 - 16 = 256 - 144 - 16 = 96$.

Réponse. a) 24 et 80 · b) $8x$ · c) le programme multiplie par 8 · d) $x = 12$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).