Plaquette 4 – Démontrer avec le calcul littéral

Calcul littéral et identités remarquables — Troisième

Exercices

Méthode

Le calcul littéral sert à **prouver** : qu'un programme de calcul donne toujours le même résultat, qu'une propriété des nombres est vraie pour tout entier, que deux expressions sont égales. On rédige des démonstrations complètes, pas des vérifications sur trois exemples.

Exercice 1 – Un programme de calcul

Programme : choisir un nombre, ajouter 6, multiplier par le nombre de départ, ajouter 9.

a) Appliquer à 4 puis à -2.

b) Montrer que le résultat est toujours un carré parfait.

Exercice 2 – Deux programmes équivalents

Programme A : choisir un nombre, le doubler, ajouter 3, élever au carré. Programme B : choisir un nombre, l'élever au carré, multiplier par 4, ajouter 12 fois le nombre, ajouter 9. Sont-ils équivalents ?

Exercice 3 – Somme de deux nombres pairs consécutifs

Démontrer que la somme de deux nombres pairs consécutifs n'est jamais un multiple de 4.

Exercice 4 – Expression toujours positive

Démontrer que $x^2 - 8x + 20$ est strictement positif pour tout x, et déterminer sa valeur minimale.

Exercice 5 – Carré d'un nombre finissant par 5

Un nombre se termine par 5 : il s'écrit $10n + 5$. Démontrer que son carré se termine toujours par 25, et donner une règle de calcul mental.

Exercice 6 – Produit d'entiers consécutifs et carrés

Soit n un entier.

a) Démontrer que $n(n+1) + (n+1)$ est toujours un carré parfait.

b) En est-il de même de $n(n+1) + n$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Comparer deux expressions

Comparer $A = (x+3)(x-1)$ et $B = x^2 + 2x - 4$ pour tout x.

Exercice 8 – Une égalité fausse

Un élève affirme que $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ pour tous x et y. Montrer que c'est faux, puis déterminer les cas où c'est vrai.

Exercice 9 – Nombre de diagonales d'un polygone

Le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés vaut $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Vérifier pour le carré et le pentagone, puis montrer que ce nombre est toujours entier.

Exercice 10 – Somme de trois carrés consécutifs

Démontrer que la somme des carrés de trois entiers consécutifs, diminuée de 2, est toujours un multiple de 3.

Exercice 11 – Périmètre et aire

Un rectangle a un périmètre de 40 cm. Sa longueur vaut x. Exprimer son aire en fonction de x, puis montrer qu'elle ne peut pas dépasser 100 cm².

Exercice 12 – Deux nombres de somme fixée

Deux nombres ont pour somme 12. Montrer que leur produit vaut $36 - d^2$ où d est la moitié de leur différence. En déduire le produit maximal.

Exercice 13 – Un entier toujours divisible

Démontrer que $(2n+1)^2 - 1$ est toujours divisible par 8, pour tout entier n.

Exercice 14 – Programme et résultat constant

Programme : choisir un nombre, ajouter 2, élever au carré, soustraire le carré du nombre, soustraire 4, diviser par le nombre de départ (non nul). Montrer que le résultat est toujours 4.

Exercice 15 – Vrai ou faux

Dire si chaque affirmation est vraie, en démontrant ou en donnant un contre-exemple.

a) x^2 est toujours supérieur à x.

b) $(x+1)^2 - x^2$ est toujours impair, pour x entier.

c) Si $x^2 = 9$, alors $x = 3$.

d) $x^2 + 1$ est toujours strictement positif.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Synthèse : trois démonstrations

Soit n un entier.

a) Démontrer que $(n+4)^2 - (n+2)^2$ est toujours divisible par 4.

b) Démontrer que $n^2 + n + 2$ est toujours pair.

c) Démontrer que $(n+1)^2 + n^2$ est toujours impair.

d) Le nombre $n^2 - n + 11$ est-il toujours premier ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).