Plaquette 2 – Équations du premier degré : technique et vérification

Équations et inéquations — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux règles autorisées.

Opération	Condition
ajouter ou retrancher un nombre aux deux membres	aucune
multiplier ou diviser les deux membres par un nombre	ce nombre doit être **non nul**

La marche à suivre.

— Supprimer les parenthèses en développant.
— Supprimer les dénominateurs en multipliant tout par un dénominateur commun.
— Regrouper les termes en x d'un côté, les nombres de l'autre.
— Réduire, puis diviser par le coefficient de x.

Produit en croix. Pour $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Trois issues possibles.

Forme finale	Conclusion
$x = k$	une solution unique
$0 = 5$ (faux)	aucune solution
$0 = 0$ (toujours vrai)	tout nombre est solution

La vérification. On remplace x par la valeur trouvée dans l'équation **de départ**, et on calcule chaque membre séparément. Les deux doivent donner le même nombre.

Erreurs les plus fréquentes. Oublier de distribuer le signe moins devant une parenthèse ; ne multiplier qu'un seul terme lors de la suppression des dénominateurs ; diviser par le coefficient de x en oubliant son signe.

Correction de l'exercice 1 – Équations élémentaires

Pour isoler x, on défait les opérations dans l'ordre inverse : d'abord l'addition ou la soustraction, ensuite la multiplication ou la division.

a) On retranche 7 aux deux membres pour supprimer le $+7$: $4x = 24$. On divise ensuite par 4 : $x = 6$.

b) On retranche 9 : $-2x = -8$. On divise par -2 ; le quotient de deux nombres négatifs est positif, donc $x = 4$.

c) On ajoute 2 : $\frac{x}{3} = 7$. Diviser par 3 se défait en multipliant par 3 :

$$x = 7 \times 3 = 21$$

Contrôle : $4 \times 6 + 7 = 31$, $9 - 2 \times 4 = 1$ et $\frac{21}{3} - 2 = 5$. Les solutions sont 6, 4 et 21.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $x = 6$ · b) $x = 4$ · c) $x = 21$.

Correction de l’exercice 2 – Inconnue dans les deux membres

Quand l’inconnue apparaît des deux côtés, on commence par regrouper tous les termes en x dans un seul membre.

a) On retranche $2x$: $3x - 3 = 12$. On ajoute 3 : $3x = 15$, d’où $x = 5$. Les deux membres valent alors 22.

b) On ajoute $4x$, ce qui garde un coefficient positif : $7 = 6x - 11$. On ajoute 11 : $18 = 6x$, d’où $x = 3$. Les deux membres valent -5.

c) En retranchant $6x$, l’inconnue disparaît et il reste

$$1 = -4$$

Cette égalité est fausse quelle que soit la valeur de x : l’équation c) n’a **aucune** solution. On le comprend en comparant les membres : $6x + 1$ dépasse toujours $6x - 4$ de 5. **Contrôle** avec $x = 0$: on obtient 1 et -4, bien différents.

Réponse. a) $x = 5$ · b) $x = 3$ · c) aucune solution.

Correction de l’exercice 3 – Équations avec parenthèses

On développe d’abord chaque membre pour se ramener à une équation sans parenthèses.

a) À gauche, $3(x + 4) = 3x + 12$; à droite, $2(x - 1) + 20 = 2x - 2 + 20 = 2x + 18$. L’équation devient $3x + 12 = 2x + 18$. On retranche $2x$ puis 12 : $x = 6$.

b) $5(2x - 3) = 10x - 15$ et $-4(x + 2) = -4x - 8$: le facteur -4 multiplie les **deux** termes de la parenthèse. On réduit le membre de gauche :

$$10x - 15 - 4x - 8 = 6x - 23$$

L’équation $6x - 23 = 1$ donne $6x = 24$, donc $x = 4$.

Contrôle : pour a), $3 \times 10 = 30$ et $2 \times 5 + 20 = 30$; pour b), $5 \times 5 - 4 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Les solutions sont 6 et 4.

Réponse. a) $x = 6$ · b) $x = 4$.

Correction de l’exercice 4 – Produit en croix

Les dénominateurs 3 et 2 sont non nuls : on peut appliquer l’égalité des produits en croix, qui supprime les fractions.

$$2(2x + 1) = 3(x - 4)$$

On développe les deux membres : $4x + 2 = 3x - 12$. On retranche $3x$: $x + 2 = -12$, puis on retranche 2 : $x = -14$.

On peut aussi multiplier les deux membres par 6, multiple commun de 3 et de 2 : on retrouve exactement la même équation.

Contrôle : le premier membre vaut $\dfrac{2 \times (-14) + 1}{3} = \dfrac{-27}{3} = -9$ et le second $\dfrac{-14 - 4}{2} = \dfrac{-18}{2} = -9$. La solution est $x = -14$.

Réponse. $x = -14$.

Correction de l’exercice 5 – Somme de fractions

Pour se débarrasser des fractions, on multiplie **tous** les termes de l’équation par 12, le plus petit multiple commun de 4 et de 6.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$12 \times \frac{x}{4} + 12 \times \frac{x}{6} = 12 \times 5$$

Comme $12 \div 4 = 3$ et $12 \div 6 = 2$, on obtient $3x + 2x = 60$, soit $5x = 60$, d'où $x = 12$.

Piège : multiplier un seul terme par 12 donnerait $3x + \frac{x}{6} = 60$, une équation différente. Chaque terme, y compris le second membre, doit être multiplié.

Contrôle : $\frac{12}{4} + \frac{12}{6} = 3 + 2 = 5$. La solution est $x = 12$.

Réponse. $x = 12$.

Correction de l'exercice 6 – Coefficients décimaux

Les virgules ne changent pas la méthode : on regroupe les termes en x d'un côté, les nombres de l'autre.

On retranche $0{,}5x$ aux deux membres. Comme $1{,}5x - 0{,}5x = x$, il reste $x - 2{,}4 = 3{,}6$. On ajoute 2,4 :

$$x = 3{,}6 + 2{,}4 = 6$$

On peut aussi commencer par multiplier les deux membres par 10 pour travailler avec des entiers : $15x - 24 = 5x + 36$, d'où $10x = 60$ et $x = 6$. Le résultat est le même, et ce passage aux entiers évite bien des erreurs de virgule.

Contrôle : à gauche, $1{,}5 \times 6 - 2{,}4 = 9 - 2{,}4 = 6{,}6$; à droite, $0{,}5 \times 6 + 3{,}6 = 3 + 3{,}6 = 6{,}6$. La solution est $x = 6$.

Réponse. $x = 6$.

Correction de l'exercice 7 – Aucune solution ou une infinité

Dans ces deux équations, le terme en x disparaît : il faut alors lire l'égalité qui reste.

a) On développe : $6x - 2 = 6x + 5$. En retranchant $6x$, il reste $-2 = 5$, ce qui est faux pour toute valeur de x. L'équation n'a **aucune** solution : les deux membres ont le même coefficient de x mais pas la même constante, ils diffèrent toujours de 7.

b) On développe et on réduit le membre de gauche : $3x + 6 - x = 2x + 6$. L'équation s'écrit

$$2x + 6 = 2x + 6$$

Les deux membres sont la même expression : l'égalité est vraie pour **tout** nombre x.

Contrôle de b) avec $x = -5$: $3 \times (-3) + 5 = -4$ et $2 \times (-5) + 6 = -4$. Conclusion : a) n'a aucune solution, b) admet tous les nombres comme solutions.

Réponse. a) aucune solution · b) tout nombre est solution.

Correction de l'exercice 8 – Équation avec une lettre

On traite a comme un nombre connu : la méthode de résolution ne change pas.

a) Pour $a = 3$: $5x - 3 = 3x + 7$. On retranche $3x$ puis on ajoute 3 : $2x = 10$, donc $x = 5$.

b) Dans le cas général, on retranche $3x$: $2x - a = 7$, puis on ajoute a : $2x = a + 7$. On divise par 2 :

$$x = \frac{a + 7}{2}$$

On retrouve bien $\frac{3 + 7}{2} = 5$ pour $a = 3$.

c) On veut $\frac{a + 7}{2} = 10$. On multiplie par 2 : $a + 7 = 20$, donc $a = 13$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : pour $a = 13$ et $x = 10$, on a $5 \times 10 - 13 = 37$ et $3 \times 10 + 7 = 37$. Il faut donc choisir $a = 13$.

Réponse. a) $x = 5$ · b) $x = \dfrac{a+7}{2}$ · c) $a = 13$.

Correction de l’exercice 9 – Isoler une lettre dans une formule

On isole ℓ comme on isolerait une inconnue, en défaisant les opérations de la formule une à une.

a) La parenthèse est multipliée par 2 : on divise les deux membres par 2, ce qui donne $\dfrac{P}{2} = L + \ell$. On retranche ensuite L :

$$\ell = \frac{P}{2} - L$$

On peut aussi l’écrire $\ell = \dfrac{P - 2L}{2}$.

b) Avec $P = 34$ cm, le demi-périmètre vaut $\dfrac{34}{2} = 17$ cm. La largeur est donc $\ell = 17 - 11 = 6$ cm.

Contrôle : $2(11 + 6) = 2 \times 17 = 34$ cm, c’est bien le périmètre donné. La largeur du rectangle mesure 6 cm.

Réponse. a) $\ell = \dfrac{P}{2} - L$ · b) $\ell = 6$ cm.

Correction de l’exercice 10 – Deux fractions égales

Les dénominateurs 4 et 6 sont non nuls, on peut donc écrire l’égalité des produits en croix :

$$6(x + 3) = 4(2x - 1)$$

On développe : $6x + 18 = 8x - 4$. On retranche $6x$ pour garder un coefficient positif : $18 = 2x - 4$. On ajoute 4 : $22 = 2x$, donc $x = 11$.

On pouvait alléger les calculs en divisant d’abord les deux membres par 2 : $3(x + 3) = 2(2x - 1)$, soit $3x + 9 = 4x - 2$, et l’on retrouve $x = 11$.

Contrôle : $\dfrac{11 + 3}{4} = \dfrac{14}{4} = 3{,}5$ et $\dfrac{2 \times 11 - 1}{6} = \dfrac{21}{6} = 3{,}5$. La solution est $x = 11$.

Réponse. $x = 11$.

Correction de l’exercice 11 – Tester une valeur

Une valeur est solution si, en la remplaçant dans l’équation, les deux membres donnent le même nombre. On calcule donc chaque membre séparément.

a) Pour $x = -2$: à gauche, $4 \times (-2) - 3 = -8 - 3 = -11$; à droite, $2(-2 - 1) - 5 = -6 - 5 = -11$. Les deux membres sont égaux : -2 **est** solution.

b) Pour $x = 3$: à gauche, $5 \times 3 - 2 = 13$; à droite, $2 \times 3 + 8 = 14$. Comme $13 \neq 14$, 3 n’est **pas** solution.

Pour trouver la vraie solution de b), on retranche $2x$ puis on ajoute 2 : $3x = 10$, d’où

$$x = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$$

Contrôle : $5 \times \dfrac{10}{3} - 2 = \dfrac{44}{3}$ et $2 \times \dfrac{10}{3} + 8 = \dfrac{44}{3}$. La solution est proche de 3, mais ce n’est pas 3.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) oui · b) non, la solution est $x = \frac{10}{3}$.

Correction de l’exercice 12 – Signes et parenthèses

La difficulté est le signe moins devant $3(2x - 1)$: le facteur -3 multiplie les **deux** termes de la parenthèse, et $-3 \times (-1) = +3$.

On développe le membre de gauche : $2x - 10 - 6x + 3 = -4x - 7$. L’équation devient $-4x - 7 = 4x - 11$. On ajoute $4x$ aux deux membres, puis 11 :

$$4 = 8x \quad \text{donc} \quad x = 0{,}5$$

Erreur classique : écrire $-3(2x - 1) = -6x - 3$ conduit à $-4x - 13 = 4x - 11$, puis à $x = -0{,}25$, ce qui est faux.

Contrôle : à gauche, $2(0{,}5 - 5) - 3(1 - 1) = -9 - 0 = -9$; à droite, $4 \times 0{,}5 - 11 = -9$. La solution est $x = 0{,}5$.

Réponse. $x = 0{,}5$.

Correction de l’exercice 13 – Le triangle isocèle

Le périmètre est la somme des trois côtés : la base x et deux côtés égaux de $x + 4$ cm. On écrit l’équation qui traduit « le périmètre vaut 41 cm ».

$$x + 2(x + 4) = 41$$

On développe et on réduit : $x + 2x + 8 = 3x + 8$. L’équation $3x + 8 = 41$ donne $3x = 33$, donc $x = 11$.

La base mesure 11 cm et chacun des deux côtés égaux mesure $11 + 4 = 15$ cm. Le triangle existe bien, car le plus grand côté est plus petit que la somme des deux autres : $15 < 11 + 15$.

Contrôle : $11 + 15 + 15 = 41$ cm. Le triangle a une base de 11 cm et deux côtés de 15 cm.

Réponse. Base 11 cm, côtés égaux 15 cm.

Correction de l’exercice 14 – L’âge du père

On appelle x le nombre d’années à attendre. Dans x ans, le père aura $38 + x$ ans et le fils $8 + x$ ans : on traduit « l’âge du père sera le triple de celui du fils ».

$$38 + x = 3(8 + x)$$

On développe : $38 + x = 24 + 3x$. On retranche x puis 24 : $14 = 2x$, donc $x = 7$.

Dans 7 ans, le père aura 45 ans et le fils 15 ans. On peut le comprendre autrement : l’écart d’âge reste toujours de 30 ans, et un père qui a le triple de l’âge de son fils a 2 fois cet âge de plus que lui, donc le fils a 15 ans.

Contrôle : $3 \times 15 = 45$. C’est **dans** 7 **ans** que le père aura le triple de l’âge de son fils.

Réponse. Dans 7 ans : le père aura 45 ans et le fils 15 ans.

Correction de l’exercice 15 – Comparer deux tarifs

On note x la distance parcourue, en kilomètres. Le taxi A coûte $4 + 1{,}8x$ euros et le taxi B coûte $9 + 1{,}3x$ euros. On cherche d’abord la distance pour laquelle les deux prix sont égaux.

$$4 + 1{,}8x = 9 + 1{,}3x$$

On retranche $1{,}3x$ puis 4 : $0{,}5x = 5$, donc $x = 10$. À 10 km, les deux taxis coûtent

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$4 + 18 = 22$ €.

Au-delà, B devient moins cher, car son prix augmente de 1,30 € par kilomètre au lieu de 1,80 € : l'écart $(4 + 1{,}8x) - (9 + 1{,}3x) = 0{,}5x - 5$ est positif dès que $x > 10$.

Contrôle à 20 km : A coûte 40 € et B coûte 35 €. Le taxi B est plus intéressant **au-delà de** 10 **km**.

Réponse. À partir de 10 km (prix commun 22 €), le taxi B devient plus intéressant.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : quatre équations

Chaque équation demande un premier geste différent : chasser un dénominateur, supprimer une parenthèse, réduire au même dénominateur ou se débarrasser des virgules.

a) On multiplie par 5 : $3x - 2 = 10$, donc $3x = 12$ et $x = 4$.

b) Le signe moins devant la parenthèse change les deux signes : $4 - x - 3 = 2x - 5$, soit $1 - x = 2x - 5$. On ajoute x puis 5 : $6 = 3x$, donc $x = 2$.

c) On multiplie tous les termes par 6 : $3x - 2(x - 1) = 6$, soit $x + 2 = 6$, donc $x = 4$.

d) On multiplie par 4 pour avoir des entiers : $x + 6 = 3x - 8$, d'où

$$2x = 14 \quad \text{donc} \quad x = 7$$

Contrôle de d) : $0{,}25 \times 7 + 1{,}5 = 3{,}25$ et $0{,}75 \times 7 - 2 = 3{,}25$. Les solutions sont 4, 2, 4 et 7.

Réponse. a) $x = 4$ · b) $x = 2$ · c) $x = 4$ · d) $x = 7$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).