

Plaquette 3 - Équations produit et équations du type $x^2 = a$

Équations et inéquations — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Règle du produit nul. C'est le pivot de tout le chapitre :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

△ Elle ne vaut **que pour zéro**. De $A \times B = 12$ on ne déduit rien : il faut d'abord tout ramener à 0.

Équation $x^2 = a$.

Valeur de a	Solutions
$a > 0$	deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
$a = 0$	une seule, $x = 0$
$a < 0$	aucune solution

Amener une équation à la forme produit.

Ce qu'on voit	Ce qu'on fait
un facteur commun	on le met en facteur
$A^2 - B^2$	on écrit $(A - B)(A + B)$
$A^2 = B^2$	on passe tout à gauche, puis différence de carrés
$a^2 \pm 2ab + b^2$	on écrit $(a \pm b)^2$
une somme non factorisable	on développe et on réduit d'abord

Les identités remarquables.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Rédaction. On annonce l'équivalence, on résout chaque facteur séparément, on conclut par la liste des solutions. Une vérification par substitution est attendue.

Correction de l'exercice 1 - Produits déjà factorisés

a) **Règle du produit nul** : un des deux facteurs est nul ✓

— **Premier facteur** : $x - 5 = 0$ ✓

— **Solution** : $x = 5$ ✓

— **Second facteur** : $x + 2 = 0$ ✓

— **Solution** : $x = -2$ ✓

— **Solutions** :

$$x = 5 \text{ ou } x = -2$$

— **Vérification pour** $x = 5$: $0 \times 7 = 0$ ✓

— **Vérification pour** $x = -2$: $(-7) \times 0 = 0$ ✓

b) **Premier facteur** : $3x - 6 = 0$ ✓

- **Résolution** : $3x = 6$, donc $x = 2$ ✓
- **Second facteur** : $2x + 7 = 0$ ✓
- **Résolution** : $2x = -7$ ✓
- **Solution** :

$$x = -3,5$$

- **Vérification pour** $x = 2$: $0 \times 11 = 0$ ✓
- **Vérification pour** $x = -3,5$: $(-16,5) \times 0 = 0$ ✓
- **Remarque** : chaque facteur fournit **une** solution ✓

Réponse. a) $x = 5$ ou $x = -2$ · b) $x = 2$ ou $x = -3,5$.

Correction de l'exercice 2 - Un facteur réduit à x

- a) **Premier facteur** : $x = 0$ ✓

- **Attention** : 0 est bien une solution, il ne faut pas l'oublier ✓
- **Second facteur** : $2x - 10 = 0$ ✓
- **Résolution** : $x = 5$ ✓
- **Solutions** :

$$x = 0 \text{ ou } x = 5$$

- **Vérification pour** $x = 0$: $0 \times (-10) = 0$ ✓
- **Vérification pour** $x = 5$: $5 \times 0 = 0$ ✓

- b) **Premier facteur** : $4x + 1 = 0$ ✓

- **Résolution** : $4x = -1$ ✓
- **Solution** : $x = -0,25$ ✓
- **Second facteur** : $x - 9 = 0$ ✓
- **Solution** : $x = 9$ ✓
- **Solutions** :

$$x = -0,25 \text{ ou } x = 9$$

- **Vérification pour** $x = -0,25$: $0 \times (-9,25) = 0$ ✓
- **Vérification pour** $x = 9$: $37 \times 0 = 0$ ✓
- **Contrôle du premier facteur en** $x = 9$: $36 + 1 = 37$ ✓

Réponse. a) $x = 0$ ou $x = 5$ · b) $x = -0,25$ ou $x = 9$.

Correction de l'exercice 3 - Un carré nul

- a) **Écriture en produit** : $(x - 3)(x - 3) = 0$ ✓

- **Règle du produit nul** : les deux facteurs sont identiques ✓
- **Équation** : $x - 3 = 0$ ✓
- **Solution** :

$$x = 3$$

- **Nombre de solutions** : **une seule** ✓
- **Vocabulaire** : on dit que c'est une solution **double** ✓
- **Vérification** : $0^2 = 0$ ✓

- b) **Équation** : $2x + 8 = 0$ ✓

- **Résolution** : $2x = -8$ ✓
- **Solution** :

$$x = -4$$

- **Vérification** : $(-8 + 8)^2 = 0$ ✓
- **Remarque** : un carré est nul uniquement si sa base l'est ✓
- **Contre-exemple utile** : $(x - 3)^2 = 9$ a **deux** solutions ✓
- **Résolution** : $x - 3 = 3$ ou $x - 3 = -3$ ✓
- **Solutions** : $x = 6$ ou $x = 0$ ✓
- **Contrôle** : $3^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$ ✓

Réponse. a) $x = 3$ (solution double) · b) $x = -4$.

Correction de l'exercice 4 - Différence de carrés

a) **Reconnaissance** : $49 = 7^2$ ✓

- **Factorisation** : $(x - 7)(x + 7) = 0$ ✓
- **Premier facteur** : $x = 7$ ✓
- **Second facteur** : $x = -7$ ✓
- **Solutions** :

$$x = 7 \text{ ou } x = -7$$

- **Vérification** : $49 - 49 = 0$ dans les deux cas ✓
- **Voie directe** : $x^2 = 49$, donc $x = \pm 7$ ✓

b) **Reconnaissance** : $9x^2 = (3x)^2$ et $16 = 4^2$ ✓

- **Factorisation** : $(3x - 4)(3x + 4) = 0$ ✓
- **Premier facteur** : $3x = 4$ ✓
- **Solution** : $x = \frac{4}{3}$ ✓
- **Second facteur** : $3x = -4$ ✓
- **Solution** : $x = -\frac{4}{3}$ ✓
- **Solutions** :

$$x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = -\frac{4}{3}$$

- **Vérification** : $9 \times \frac{16}{9} = 16$ ✓
- **Différence** : $16 - 16 = 0$ ✓
- **Valeur approchée** : $\approx \pm 1,33$ ✓

Réponse. a) $x = 7$ ou $x = -7$ · b) $x = \frac{4}{3}$ ou $x = -\frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 5 - Carré parfait à reconnaître

a) **Test du carré parfait** : $9 = 3^2$ ✓

- **Double produit** : $2 \times x \times 3 = 6x$ ✓
- **Correspondance** : c'est bien le terme du milieu ✓
- **Factorisation** : $(x + 3)^2 = 0$ ✓
- **Solution** :

$$x = -3$$

- **Vérification** : $9 - 18 + 9 = 0$ ✓

b) **Test du carré parfait** : $25 = 5^2$ ✓

- **Double produit** : $2 \times x \times 5 = 10x$ ✓
 - **Signe** : le terme du milieu est négatif ✓
 - **Factorisation** : $(x - 5)^2 = 0$ ✓
 - **Solution** :

$$x = 5$$
 - **Vérification** : $25 - 50 + 25 = 0$ ✓
 - **Remarque** : ces deux équations n'ont qu'une solution ✓
 - **Comparaison** : $x^2 - 10x + 24 = 0$ en a deux ✓
 - **Factorisation** : $(x - 4)(x - 6) = 0$ ✓
 - **Contrôle du développement** : $x^2 - 6x - 4x + 24 = x^2 - 10x + 24$ ✓
- Réponse.** a) $x = -3$ · b) $x = 5$.

Correction de l'exercice 6 - Facteur commun

- **Facteur commun** : $5x$ ✓
 - **Factorisation** : $5x(x - 3) = 0$ ✓
 - **Contrôle du développement** : $5x^2 - 15x$ ✓
 - **Premier facteur** : $5x = 0$ ✓
 - **Solution** : $x = 0$ ✓
 - **Second facteur** : $x - 3 = 0$ ✓
 - **Solution** : $x = 3$ ✓
 - **Solutions** :

$$x = 0 \text{ ou } x = 3$$
 - **Vérification pour** $x = 3$: $45 - 45 = 0$ ✓
 - **Vérification pour** $x = 0$: $0 - 0 = 0$ ✓
 - **Erreur à ne pas commettre** : diviser par x ✓
 - **Pourquoi** : on ne divise que par un nombre **non nul** ✓
 - **Conséquence de l'erreur** : on obtiendrait $5x = 15$, et la solution $x = 0$ disparaîtrait ✓
 - **Règle** : face à un x en facteur, on factorise, on ne simplifie jamais ✓
- Réponse.** $x = 0$ ou $x = 3$.

Correction de l'exercice 7 - Carré moins un nombre

- **Reconnaissance** : différence de carrés ✓
- **Identification** : $A = x + 2$ et $B = 3$ ✓
- **Premier facteur** : $A - B = x - 1$ ✓
- **Second facteur** : $A + B = x + 5$ ✓
- **Factorisation** :

$$(x - 1)(x + 5) = 0$$
- **Premier facteur nul** : $x = 1$ ✓
- **Second facteur nul** : $x = -5$ ✓
- **Vérification pour** $x = 1$: $3^2 - 9 = 0$ ✓
- **Vérification pour** $x = -5$: $(-3)^2 - 9 = 0$ ✓
- **Voie alternative** : $(x + 2)^2 = 9$ ✓
- **Deux cas** : $x + 2 = 3$ ou $x + 2 = -3$ ✓
- **Solutions** : $x = 1$ ou $x = -5$ ✓

- **Concordance des deux méthodes** ✓
- **Piège** : n'écrire que $x + 2 = 3$ ferait perdre une solution ✓
- **Contrôle par développement** : $(x - 1)(x + 5) = x^2 + 4x - 5$ ✓
- **Et** : $(x + 2)^2 - 9 = x^2 + 4x + 4 - 9 = x^2 + 4x - 5$ ✓

Réponse. $x = 1$ ou $x = -5$.

Correction de l'exercice 8 - Deux carrés égaux

- **Passage à zéro** : $(2x - 1)^2 - (x + 4)^2 = 0$ ✓
- **Différence de carrés** : $A = 2x - 1$ et $B = x + 4$ ✓
- **Premier facteur** : $A - B = 2x - 1 - x - 4 = x - 5$ ✓
- **Second facteur** : $A + B = 2x - 1 + x + 4 = 3x + 3$ ✓
- **Factorisation** :

$$(x - 5)(3x + 3) = 0$$
- **Premier facteur nul** : $x = 5$ ✓
- **Second facteur nul** : $3x = -3$, donc $x = -1$ ✓
- **Vérification pour** $x = 5$: $(10 - 1)^2 = 81$ ✓
- **Autre membre** : $9^2 = 81$ ✓
- **Vérification pour** $x = -1$: $(-2 - 1)^2 = 9$ ✓
- **Autre membre** : $3^2 = 9$ ✓
- **Égalités vérifiées** ✓
- **Piège classique** : conclure directement $2x - 1 = x + 4$ ✓
- **Conséquence** : on ne trouverait que $x = 5$ ✓
- **Raison** : deux carrés sont égaux si les bases sont égales **ou opposées** ✓
- **Second cas** : $2x - 1 = -(x + 4)$ ✓
- **Résolution** : $3x = -3$, donc $x = -1$ ✓

Réponse. $x = 5$ ou $x = -1$.

Correction de l'exercice 9 - Équations x carré égale a

- a) **Cas** $a > 0$: deux solutions opposées ✓
- **Solutions** : $x = \sqrt{20}$ ou $x = -\sqrt{20}$ ✓
- **Simplification** : $20 = 4 \times 5$ ✓
- **Forme exacte** :

$$x = 2\sqrt{5} \text{ ou } x = -2\sqrt{5}$$
- **Valeur approchée** : $\approx \pm 4,47$ ✓
- **Vérification** : $(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$ ✓
- b) **Argument** : un carré est toujours positif ou nul ✓
- **Conclusion** : l'équation n'a **aucune** solution ✓
- **Contrôle** : $2^2 = 4$ et $(-2)^2 = 4$, jamais -4 ✓
- c) **On divise par 3** : $x^2 = 9$ ✓
- **Solutions** :

$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$
- **Vérification pour** $x = -3$: $3 \times 9 = 27$ ✓

- **Piège** : oublier la solution négative ✓
- **Remarque** : $\sqrt{9} = 3$ désigne uniquement la racine **positive** ✓
- **Conséquence** : l'équation $x^2 = 9$ et le nombre $\sqrt{9}$ ne sont pas la même chose ✓
- **Cas limite** : $x^2 = 0$ n'a qu'une solution, $x = 0$ ✓

Réponse. a) $x = \pm 2\sqrt{5}$ · b) aucune solution · c) $x = 3$ ou $x = -3$.

Correction de l'exercice 10 - Le piège du produit non nul

- **Nature de l'erreur** : la règle du produit ne vaut que pour **zéro** ✓
- **Contre-exemple** : $2 \times 3 = 6$, sans qu'aucun facteur vaille 6 ✓
- **Test de la fausse solution** $x = 8$: $5 \times 9 = 45$ ✓
- **Verdict** : ce n'est pas 5 ✓
- **Test de l'autre fausse solution** $x = 4$: $1 \times 5 = 5$ ✓
- **Coïncidence** : celle-ci fonctionne, par hasard ✓
- **Méthode correcte** : tout ramener à zéro ✓
- **Développement** : $x^2 + x - 3x - 3 = 5$ ✓
- **Réduction** : $x^2 - 2x - 3 = 5$ ✓
- **Passage à zéro** : $x^2 - 2x - 8 = 0$ ✓
- **Recherche** : deux nombres de produit -8 et de somme -2 ✓
- **Candidats** : -4 et 2 ✓
- **Factorisation** :

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

- **Contrôle du développement** : $x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$ ✓
- **Solutions** : $x = 4$ ou $x = -2$ ✓
- **Vérification pour** $x = 4$: $1 \times 5 = 5$ ✓
- **Vérification pour** $x = -2$: $(-5) \times (-1) = 5$ ✓
- **Bilan** : la méthode de l'élève manquait la solution $x = -2$ ✓

Réponse. La règle ne vaut que pour 0 : on obtient $(x - 4)(x + 2) = 0$, donc $x = 4$ ou $x = -2$.

Correction de l'exercice 11 - Facteur commun caché

- **Observation** : $(x - 1)$ apparaît dans les deux termes ✓
- **Facteur commun** : $(x - 1)$ ✓
- **Mise en facteur** : $(x - 1)[(x + 4) + (2x - 3)]$ ✓
- **Réduction du crochet** : $3x + 1$ ✓
- **Forme factorisée** :

$$(x - 1)(3x + 1) = 0$$

- **Premier facteur nul** : $x = 1$ ✓
- **Second facteur nul** : $3x = -1$ ✓
- **Solution** : $x = -\frac{1}{3}$ ✓
- **Vérification pour** $x = 1$: les deux produits contiennent le facteur 0 ✓
- **Total** : 0 ✓
- **Vérification pour** $x = -\frac{1}{3}$: $x - 1 = -\frac{4}{3}$ ✓
- **Crochet** : $3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$ ✓

- **Produit** : 0 ✓
- **Erreur à éviter** : développer entièrement avant de factoriser ✓
- **Ce que cela donnerait** : $3x^2 - 2x - 1 = 0$, plus difficile à factoriser ✓
- **Contrôle** : $(x - 1)(3x + 1) = 3x^2 + x - 3x - 1 = 3x^2 - 2x - 1$ ✓
- **Concordance** ✓

Réponse. $(x - 1)(3x + 1) = 0$, donc $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 12 - Carré contre carré

- **Réécriture** : $4x^2 = (2x)^2$ ✓
- **Forme obtenue** : $(2x)^2 - (x + 3)^2 = 0$ ✓
- **Identification** : $A = 2x$ et $B = x + 3$ ✓
- **Premier facteur** : $A - B = x - 3$ ✓
- **Second facteur** : $A + B = 3x + 3$ ✓
- **Factorisation** :

$$(x - 3)(3x + 3) = 0$$
- **Premier facteur nul** : $x = 3$ ✓
- **Second facteur nul** : $x = -1$ ✓
- **Vérification pour** $x = 3$: $4 \times 9 = 36$ ✓
- **Autre terme** : $6^2 = 36$ ✓
- **Différence** : 0 ✓
- **Vérification pour** $x = -1$: $4 \times 1 = 4$ ✓
- **Autre terme** : $2^2 = 4$ ✓
- **Différence** : 0 ✓
- **Contrôle par développement** : $(x - 3)(3x + 3) = 3x^2 - 6x - 9$ ✓
- **Et** : $4x^2 - (x^2 + 6x + 9) = 3x^2 - 6x - 9$ ✓
- **Concordance** ✓

Réponse. $x = 3$ ou $x = -1$.

Correction de l'exercice 13 - Le carré agrandi

- **Inconnue** : x , le côté initial en centimètres ✓
- **Aire initiale** : x^2 ✓
- **Nouveau côté** : $x + 5$ ✓
- **Nouvelle aire** : $(x + 5)^2$ ✓
- **Condition** : $(x + 5)^2 = 4x^2$ ✓
- **Passage à zéro** : $(x + 5)^2 - (2x)^2 = 0$ ✓
- **Premier facteur** : $x + 5 - 2x = 5 - x$ ✓
- **Second facteur** : $x + 5 + 2x = 3x + 5$ ✓
- **Factorisation** :

$$(5 - x)(3x + 5) = 0$$
- **Premier facteur nul** : $x = 5$ ✓
- **Second facteur nul** : $x = -\frac{5}{3}$ ✓
- **Rejet** : un côté ne peut pas être négatif ✓
- **Solution retenue** :

$$x = 5 \text{ cm}$$

- **Aire initiale** : 25 cm^2 ✓
- **Nouveau côté** : 10 cm ✓
- **Nouvelle aire** : 100 cm^2 ✓
- **Rapport** : $\frac{100}{25} = 4$ ✓
- **Vérification réussie** ✓
- **Remarque** : quadrupler l'aire revient à doubler le côté ✓

Réponse. 5 cm : l'aire passe de 25 à 100 cm^2 .

Correction de l'exercice 14 - Deux nombres, un produit

- **Inconnue** : x , le nombre cherché ✓
- **Triple diminué de 4** : $3x - 4$ ✓
- **Condition** : $x(3x - 4) = 0$ ✓
- **Règle du produit nul** ✓
- **Premier facteur** : $x = 0$ ✓
- **Second facteur** : $3x - 4 = 0$ ✓
- **Résolution** : $3x = 4$ ✓
- **Solution** :

$$x = \frac{4}{3}$$

- **Valeur décimale** : $\approx 1,33$ ✓
- **Solutions** : 0 et $\frac{4}{3}$ ✓
- **Vérification pour** $x = 0$: $0 \times (-4) = 0$ ✓
- **Vérification pour** $x = \frac{4}{3}$: $3 \times \frac{4}{3} - 4 = 0$ ✓
- **Produit** : $\frac{4}{3} \times 0 = 0$ ✓
- **Forme développée** : $3x^2 - 4x = 0$ ✓
- **Contrôle** : $3 \times \frac{16}{9} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} - \frac{16}{3} = 0$ ✓
- **Remarque** : développer rend la résolution plus longue ✓

Réponse. $x = 0$ ou $x = \frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 15 - Reconnaître avant de résoudre

a) **Méthode** : équation du type $x^2 = a$ avec $a > 0$ ✓

- **Racine** : $\sqrt{121} = 11$ ✓
- **Solutions** :

$$x = 11 \text{ ou } x = -11$$

- **Vérification** : 121 dans les deux cas ✓

b) **Méthode** : facteur commun, puis différence de carrés ✓

- **Facteur commun** : 7 ✓
- **Factorisation partielle** : $7(x^2 - 4) = 0$ ✓
- **On divise par 7** : $x^2 - 4 = 0$ ✓
- **Différence de carrés** : $(x - 2)(x + 2) = 0$ ✓

— **Solutions :**

$$x = 2 \text{ ou } x = -2$$

— **Vérification pour** $x = 2$: $28 - 28 = 0$ ✓

c) **Méthode** : carré nul ✓

— **Équation** : $x - 6 = 0$ ✓

— **Solution :**

$$x = 6$$

— **Nombre de solutions** : une seule ✓

— **Vérification** : $0 \times 0 = 0$ ✓

— **Bilan des trois cas** : deux solutions, deux solutions, une seule ✓

— **Ce qui les distingue** : la forme de l'équation, pas sa longueur ✓

Réponse. a) $x = \pm 11$ · b) $x = \pm 2$ · c) $x = 6$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : cinq équations

a) **Premier facteur** : $5x + 15 = 0$ ✓

— **Résolution** : $5x = -15$, donc $x = -3$ ✓

— **Second facteur** : $x = 2$ ✓

— **Solutions :**

$$x = -3 \text{ ou } x = 2$$

b) **Différence de carrés** : $81 = 9^2$ ✓

— **Factorisation** : $(x - 9)(x + 9) = 0$ ✓

— **Solutions :**

$$x = 9 \text{ ou } x = -9$$

c) **Test du carré parfait** : $16 = 4^2$ et $2 \times x \times 4 = 8x$ ✓

— **Factorisation** : $(x + 4)^2 = 0$ ✓

— **Solution :**

$$x = -4$$

— **Vérification** : $16 - 32 + 16 = 0$ ✓

d) **On divise par 2** : $x^2 = 25$ ✓

— **Solutions :**

$$x = 5 \text{ ou } x = -5$$

— **Vérification pour** $x = -5$: $2 \times 25 = 50$ ✓

e) **Passage à zéro** : $(3x - 1)^2 - (x + 5)^2 = 0$ ✓

— **Premier facteur** : $3x - 1 - x - 5 = 2x - 6$ ✓

— **Second facteur** : $3x - 1 + x + 5 = 4x + 4$ ✓

— **Factorisation** : $(2x - 6)(4x + 4) = 0$ ✓

— **Premier facteur nul** : $x = 3$ ✓

— **Second facteur nul** : $x = -1$ ✓

— **Solutions :**

$$x = 3 \text{ ou } x = -1$$

— **Vérification pour** $x = 3$: $8^2 = 64$ et $8^2 = 64$ ✓

- **Vérification pour $x = -1$:** $(-4)^2 = 16$ et $4^2 = 16$ ✓
- **Bilan :** quatre équations à deux solutions, une à solution unique ✓

Réponse. a) -3 ou 2 · b) ± 9 · c) -4 · d) ± 5 · e) 3 ou -1 .