Plaquette 3 – Équations produit et équations du type $x^2 = a$

Équations et inéquations — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Règle du produit nul. C'est le pivot de tout le chapitre :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

⚠ Elle ne vaut **que pour zéro**. De $A \times B = 12$ on ne déduit rien : il faut d'abord tout ramener à 0.

Équation $x^2 = a$.

Valeur de a	Solutions
$a > 0$	deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
$a = 0$	une seule, $x = 0$
$a < 0$	aucune solution

Amener une équation à la forme produit.

Ce qu'on voit	Ce qu'on fait
un facteur commun	on le met en facteur
$A^2 - B^2$	on écrit $(A - B)(A + B)$
$A^2 = B^2$	on passe tout à gauche, puis différence de carrés
$a^2 \pm 2ab + b^2$	on écrit $(a \pm b)^2$
une somme non factorisable	on développe et on réduit d'abord

Les identités remarquables.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Rédaction. On annonce l'équivalence, on résout chaque facteur séparément, on conclut par la liste des solutions. Une vérification par substitution est attendue.

Correction de l'exercice 1 – Produits déjà factorisés

Les membres de gauche sont déjà des produits et le second membre vaut 0 : on applique la règle du produit nul. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

a) $x - 5 = 0$ donne $x = 5$; $x + 2 = 0$ donne $x = -2$.

b) $3x - 6 = 0$ donne $3x = 6$, donc $x = 2$; $2x + 7 = 0$ donne $2x = -7$, donc

$$x = -\frac{7}{2} = -3{,}5$$

Chaque facteur du premier degré fournit **une** solution, d'où deux solutions par équation.

Contrôle de b) : pour $x = 2$, le produit vaut $0 \times 11 = 0$; pour $x = -3{,}5$, il vaut $(-16{,}5) \times 0 = 0$. Les solutions sont 5 et -2, puis 2 et $-3{,}5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $x = 5$ ou $x = -2$ · b) $x = 2$ ou $x = -3{,}5$.

Correction de l'exercice 2 – Un facteur réduit à x

On applique la règle du produit nul, en faisant attention au facteur réduit à x : il donne lui aussi une solution, $x = 0$, qu'il ne faut pas oublier.

a) Premier facteur : $x = 0$. Second facteur : $2x - 10 = 0$, soit $2x = 10$, donc $x = 5$.

b) Premier facteur : $4x + 1 = 0$, soit $4x = -1$, donc $x = -\frac{1}{4} = -0{,}25$. Second facteur : $x - 9 = 0$, donc $x = 9$.

$$x(2x - 10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 5$$

Contrôle : pour $x = 5$, $5 \times 0 = 0$; pour $x = 9$, $(4 \times 9 + 1) \times 0 = 37 \times 0 = 0$. Les solutions sont 0 et 5, puis $-0{,}25$ et 9.

Réponse. a) $x = 0$ ou $x = 5$ · b) $x = -0{,}25$ ou $x = 9$.

Correction de l'exercice 3 – Un carré nul

Un carré s'écrit comme un produit de deux facteurs **identiques** : $(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$. La règle du produit nul conduit donc deux fois à la même équation.

a) $(x - 3)^2$ est nul si et seulement si $x - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$. Il n'y a qu'une solution, qu'on appelle solution **double**.

b) $(2x + 8)^2$ est nul si et seulement si $2x + 8 = 0$, soit $2x = -8$:

$$x = -4$$

Attention : cela ne vaut que pour un carré **nul**. L'équation $(x - 3)^2 = 9$ a deux solutions, car $x - 3$ peut valoir 3 ou -3.

Contrôle : $(3 - 3)^2 = 0$ et $(2 \times (-4) + 8)^2 = 0^2 = 0$. Les valeurs cherchées sont $x = 3$ et $x = -4$.

Réponse. a) $x = 3$ (solution double) · b) $x = -4$.

Correction de l'exercice 4 – Différence de carrés

On reconnaît une différence de deux carrés : on la factorise avec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, puis on applique la règle du produit nul.

a) $49 = 7^2$, donc $x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$. Les solutions sont $x = 7$ et $x = -7$. On pouvait aussi écrire $x^2 = 49$ et conclure directement.

b) $9x^2 = (3x)^2$ et $16 = 4^2$, donc

$$9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$$

$3x - 4 = 0$ donne $x = \frac{4}{3}$ et $3x + 4 = 0$ donne $x = -\frac{4}{3}$ (environ 1,33 et $-1{,}33$).

Contrôle de b) : $9 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 9 \times \frac{16}{9} = 16$, et $16 - 16 = 0$. Les solutions sont ± 7, puis $\pm\frac{4}{3}$.

Réponse. a) $x = 7$ ou $x = -7$ · b) $x = \frac{4}{3}$ ou $x = -\frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 5 – Carré parfait à reconnaître

Un trinôme est un carré parfait quand deux de ses termes sont des carrés a^2 et b^2, et que le troisième est le double produit $2ab$. On le vérifie avant de factoriser.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) $9 = 3^2$ et $2 \times x \times 3 = 6x$: c'est bien le terme du milieu, donc $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$. L'équation $(x+3)^2 = 0$ a pour seule solution $x = -3$.

b) $25 = 5^2$ et $2 \times x \times 5 = 10x$, avec un signe moins :

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$$

L'équation $(x-5)^2 = 0$ a pour seule solution $x = 5$.

Contrôle : $9 - 18 + 9 = 0$ et $25 - 50 + 25 = 0$. Chaque équation a une seule solution : -3 pour a), 5 pour b).

Réponse. a) $x = -3$ · b) $x = 5$.

Correction de l'exercice 6 – Facteur commun

Le second membre est nul, mais le premier n'est pas un produit : on le factorise d'abord. Les deux termes contiennent 5 et x, donc le facteur commun est $5x$.

$$5x^2 - 15x = 5x(x-3)$$

La règle du produit nul donne $5x = 0$, soit $x = 0$, ou $x - 3 = 0$, soit $x = 3$.

Erreur à ne pas commettre : diviser les deux membres par x. On n'a le droit de diviser que par un nombre **non nul**, or x peut justement valoir 0 : on obtiendrait $5x = 15$ et la solution $x = 0$ disparaîtrait.

Contrôle : pour $x = 3$, $5 \times 9 - 15 \times 3 = 45 - 45 = 0$. Les solutions sont $x = 0$ et $x = 3$.

Réponse. $x = 0$ ou $x = 3$.

Correction de l'exercice 7 – Carré moins un nombre

Comme $9 = 3^2$, le membre de gauche est une différence de deux carrés, avec $a = x + 2$ et $b = 3$. On factorise :

$$(x+2)^2 - 3^2 = (x + 2 - 3)(x + 2 + 3) = (x-1)(x+5)$$

La règle du produit nul donne $x - 1 = 0$, soit $x = 1$, ou $x + 5 = 0$, soit $x = -5$.

Autre méthode : on écrit $(x+2)^2 = 9$. Un nombre dont le carré vaut 9 est 3 ou -3, donc $x + 2 = 3$ ou $x + 2 = -3$. N'écrire que $x + 2 = 3$ ferait perdre la solution -5.

Contrôle : $(1+2)^2 - 9 = 0$ et $(-5+2)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$. Les solutions sont $x = 1$ et $x = -5$.

Réponse. $x = 1$ ou $x = -5$.

Correction de l'exercice 8 – Deux carrés égaux

On ne peut pas conclure directement « $2x - 1 = x + 4$ » : deux nombres qui ont le même carré sont égaux **ou opposés**. On ramène donc tout dans un membre pour obtenir une différence de carrés.

$$(2x-1)^2 - (x+4)^2 = 0$$

Avec $a = 2x - 1$ et $b = x + 4$: $a - b = 2x - 1 - x - 4 = x - 5$ et $a + b = 2x - 1 + x + 4 = 3x + 3$. L'équation devient $(x-5)(3x+3) = 0$, d'où $x = 5$ ou $3x = -3$, soit $x = -1$.

La solution $x = -1$ correspond au cas où les bases sont opposées : $2x - 1 = -(x + 4)$.

Contrôle : pour $x = 5$, $9^2 = 81$ des deux côtés ; pour $x = -1$, $(-3)^2 = 9$ et $3^2 = 9$. Les solutions sont 5 et -1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $x = 5$ ou $x = -1$.

Correction de l'exercice 9 – Équations x carré égale a

On ramène chaque équation à la forme $x^2 = a$ et l'on regarde le signe de a : si $a > 0$, il y a deux solutions opposées $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$; si $a < 0$, il n'y en a aucune.

a) $20 > 0$: les solutions sont $x = \sqrt{20}$ et $x = -\sqrt{20}$. Comme $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$, on peut aussi écrire $\pm 2\sqrt{5}$, soit environ $\pm 4{,}47$.

b) Un carré est toujours positif ou nul, il ne peut pas valoir -4 : l'équation n'a **aucune** solution.

c) On divise par 3 pour isoler le carré : $x^2 = 9$, d'où

$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Attention : $\sqrt{9} = 3$ désigne seulement la racine positive ; c'est l'équation $x^2 = 9$ qui a deux solutions.

Contrôle de c) : $3 \times (-3)^2 = 3 \times 9 = 27$. Conclusion : $\pm\sqrt{20}$, aucune solution, ± 3.

Réponse. a) $x = \pm 2\sqrt{5}$ · b) aucune solution · c) $x = 3$ ou $x = -3$.

Correction de l'exercice 10 – Le piège du produit non nul

La règle du produit nul ne vaut que pour un produit égal à **zéro**. Un produit peut valoir 5 sans qu'aucun facteur vaille 5 : par exemple $2{,}5 \times 2 = 5$. Le raisonnement de l'élève est donc faux.

Ses deux « solutions » le montrent : $x = 8$ donne $5 \times 9 = 45$, ce qui n'est pas 5 ; $x = 4$ donne $1 \times 5 = 5$, mais par hasard.

On ramène tout à zéro : $(x - 3)(x + 1) - 5 = 0$. En développant,
$x^2 + x - 3x - 3 - 5 = x^2 - 2x - 8$, et l'on vérifie l'égalité donnée en développant
$(x - 4)(x + 2) = x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$. L'équation devient

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

donc $x = 4$ ou $x = -2$. **Contrôle** pour $x = -2$: $(-5) \times (-1) = 5$. Les solutions sont 4 et -2 ; la méthode de l'élève manquait -2.

Réponse. La règle ne vaut que pour 0 : on obtient $(x - 4)(x + 2) = 0$, donc $x = 4$ ou $x = -2$.

Correction de l'exercice 11 – Facteur commun caché

Le facteur $(x - 1)$ apparaît dans les deux termes : on le met en facteur plutôt que de tout développer.

$$(x - 1)[(x + 4) + (2x - 3)] = (x - 1)(3x + 1)$$

La règle du produit nul donne $x - 1 = 0$, soit $x = 1$, ou $3x + 1 = 0$, soit $x = -\frac{1}{3}$.

Développer d'abord aurait conduit à $3x^2 - 2x - 1 = 0$, bien plus difficile à résoudre au collège : repérer le facteur commun est le geste décisif.

Contrôle : pour $x = 1$, chaque terme contient le facteur 0, donc la somme est nulle ; pour $x = -\frac{1}{3}$, le crochet vaut $3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$. Les solutions sont 1 et $-\frac{1}{3}$.

Réponse. $(x - 1)(3x + 1) = 0$, donc $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Carré contre carré

On écrit $4x^2 = (2x)^2$: le membre de gauche devient une différence de deux carrés, avec $a = 2x$ et $b = x + 3$.

$$(2x)^2 - (x+3)^2 = (2x - x - 3)(2x + x + 3) = (x - 3)(3x + 3)$$

Le signe moins devant b s’applique à tout $x + 3$, d’où $2x - x - 3 = x - 3$. La règle du produit nul donne $x = 3$ ou $3x + 3 = 0$, soit $x = -1$.

Contrôle : pour $x = 3$, $4 \times 9 - 6^2 = 36 - 36 = 0$; pour $x = -1$, $4 \times 1 - 2^2 = 0$. On peut aussi développer : $4x^2 - (x^2 + 6x + 9) = 3x^2 - 6x - 9$, comme $(x - 3)(3x + 3)$. Les solutions sont 3 et -1.

Réponse. $x = 3$ ou $x = -1$.

Correction de l’exercice 13 – Le carré agrandi

On note x le côté initial, en centimètres. L’aire initiale vaut x^2 et la nouvelle aire $(x + 5)^2$; « l’aire est multipliée par 4 » se traduit par $(x + 5)^2 = 4x^2$.

On écrit $4x^2 = (2x)^2$ et l’on ramène tout à zéro pour factoriser une différence de carrés :

$$(x+5)^2 - (2x)^2 = (5 - x)(3x + 5) = 0$$

donc $x = 5$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$. Une longueur est positive : seule la solution $x = 5$ convient.

On pouvait raisonner directement : multiplier l’aire par 4 revient à doubler le côté, donc $x + 5 = 2x$, d’où $x = 5$.

Contrôle : le carré passe de 5 cm à 10 cm de côté, et son aire de 25 cm² à 100 cm², soit 4 fois plus. Le côté initial mesure 5 **cm**.

Réponse. 5 cm : l’aire passe de 25 à 100 cm².

Correction de l’exercice 14 – Deux nombres, un produit

On note x le nombre cherché. Son triple diminué de 4 s’écrit $3x - 4$, et « leur produit est nul » se traduit par une équation produit.

$$x(3x - 4) = 0$$

La règle du produit nul donne $x = 0$, ou $3x - 4 = 0$, soit $3x = 4$ et $x = \dfrac{4}{3}$ (environ 1,33).

Il est inutile de développer en $3x^2 - 4x = 0$: on devrait refactoriser pour conclure. La forme produit donnée par l’énoncé est la plus directe.

Contrôle : pour $x = 0$, $0 \times (-4) = 0$; pour $x = \dfrac{4}{3}$, le triple diminué de 4 vaut $4 - 4 = 0$, donc le produit est nul. Les nombres possibles sont 0 **et** $\dfrac{4}{3}$.

Réponse. $x = 0$ ou $x = \dfrac{4}{3}$.

Correction de l’exercice 15 – Reconnaître avant de résoudre

On commence par lire la forme de l’équation, car c’est elle qui donne la méthode.

a) Forme $x^2 = a$ avec $a = 121 > 0$: deux solutions opposées. Comme $11^2 = 121$, on obtient $x = 11$ ou $x = -11$.

b) Le facteur commun 7 donne $7(x^2 - 4) = 0$. Comme $7 \neq 0$, c’est $x^2 - 4$ qui est nul, et l’on factorise une différence de carrés :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2) = 0$$

d'où $x = 2$ ou $x = -2$.

c) $(x-6)(x-6)$ est le carré $(x-6)^2$: il est nul seulement si $x - 6 = 0$, soit $x = 6$, une seule solution.

Contrôle de b) : $7 \times 4 - 28 = 0$. Les solutions sont ± 11, ± 2 et 6.

Réponse. a) $x = \pm 11$ · b) $x = \pm 2$ · c) $x = 6$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : cinq équations

On identifie la forme de chaque équation avant de la résoudre.

a) Produit nul : $5x + 15 = 0$ donne $x = -3$, et $x - 2 = 0$ donne $x = 2$.

b) Différence de carrés : $x^2 - 81 = (x-9)(x+9)$, d'où $x = 9$ ou $x = -9$.

c) Carré parfait, car $16 = 4^2$ et $2 \times x \times 4 = 8x$: $(x+4)^2 = 0$, d'où la seule solution $x = -4$.

d) On divise par 2 : $x^2 = 25$, donc $x = 5$ ou $x = -5$.

e) On ramène à zéro et l'on factorise la différence de carrés :

$$(3x-1)^2 - (x+5)^2 = (2x-6)(4x+4) = 0$$

d'où $x = 3$ ou $x = -1$.

Contrôle de e) : pour $x = 3$, $8^2 = 8^2$; pour $x = -1$, $(-4)^2 = 4^2 = 16$. Solutions : -3 et 2 ; ± 9 ; -4 ; ± 5 ; 3 et -1.

Réponse. a) -3 ou 2 · b) ± 9 · c) -4 · d) ± 5 · e) 3 ou -1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).