Plaquette 4 – Inéquations : résoudre, représenter, interpréter

Équations et inéquations — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les opérations autorisées.

Opération	Effet sur le sens
ajouter ou retrancher un nombre	aucun
multiplier ou diviser par un nombre **positif**	aucun
multiplier ou diviser par un nombre **négatif**	le sens **change**

Les quatre symboles.

Symbole	Lecture	Borne
$<$	strictement inférieur	exclue
$\leq$	inférieur ou égal	incluse
$>$	strictement supérieur	exclue
$\geq$	supérieur ou égal	incluse

Écrire l'ensemble des solutions.

Inégalité	Sur une droite graduée
$x < 4$	à gauche de 4, le nombre 4 exclu
$x \leq 4$	à gauche de 4, le nombre 4 inclus
$x > 4$	à droite de 4, le nombre 4 exclu
$x \geq 4$	à droite de 4, le nombre 4 inclus
$-1 \leq x \leq 4$	entre -1 et 4, bornes incluses

On marque une borne **incluse** par un crochet tourné vers les solutions (ou un point plein), une borne **exclue** par un crochet tourné vers l'extérieur (ou un point vide).

Exemple type. Pour résoudre $-2x + 1 > 9$, on retranche 1, puis on divise par -2, nombre négatif, ce qui change le sens :

$$-2x > 8 \Leftrightarrow x < -4$$

Sur la droite graduée. On place la borne, on hachure la partie exclue et on trace un trait épais sur la partie solution. Un crochet tourné vers la zone solution signale une borne incluse.

Dans un problème. L'énoncé impose souvent en plus que l'inconnue soit un **entier**, une **longueur positive** ou un **effectif** : on le dit, puis on donne la plus petite ou la plus grande valeur admissible.

Correction de l'exercice 1 – Inéquations élémentaires

On résout comme une équation, avec une seule différence : multiplier ou diviser par un nombre **négatif** change le sens de l'inégalité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) On retranche 5 : $3x \leq 12$. On divise par 3, qui est positif, donc le sens est conservé : $x \leq 4$.

b) On retranche 7 : $-2x > -6$. On divise par -2, négatif, donc le sens **change** :

$$x < \frac{-6}{-2} = 3$$

c) On multiplie par 5, positif : $x \geq -10$.

Contrôle de b) : $x = 0$ donne $7 > 1$, vrai, et $x = 5$ donne $-3 > 1$, faux, ce qui est cohérent avec $x < 3$. Les solutions sont $x \leq 4$, $x < 3$ et $x \geq -10$.

Réponse. a) $x \leq 4$ · b) $x < 3$ · c) $x \geq -10$.

Correction de l’exercice 2 – Inconnue dans les deux membres

On regroupe les termes en x dans un membre et les nombres dans l’autre, en surveillant le signe du coefficient par lequel on divise à la fin.

a) On retranche $2x$ puis on ajoute 3 : $3x < 12$. On divise par 3, positif : $x < 4$.

b) On retranche x puis 4 : $-4x \geq 12$. On divise par -4, négatif, donc le sens change :

$$x \leq -3$$

En b), on pouvait aussi ajouter $3x$ et retrancher 16 pour obtenir $-12 \geq 4x$, puis diviser par 4, positif : on évite ainsi la division par un négatif.

Contrôle de b) avec $x = -3$: $4 + 9 = 13$ et $-3 + 16 = 13$, l’égalité est atteinte, donc la borne -3 est incluse. Solutions : $x < 4$ et $x \leq -3$.

Réponse. a) $x < 4$ · b) $x \leq -3$.

Correction de l’exercice 3 – Avec des parenthèses

On développe d’abord les deux membres : $2x - 2 \leq 3x + 6$. Pour garder un coefficient de x positif, on retranche $2x$, le plus petit des deux, puis 6 :

$$-8 \leq x$$

Cette inégalité se lit « x est supérieur ou égal à -8 » : $x \geq -8$. La lire « $x \leq -8$ » est une erreur fréquente : ici, c’est x le plus grand des deux nombres.

Contrôle : pour $x = -8$, $2 \times (-9) = -18$ et $3 \times (-6) = -18$, l’égalité est atteinte ; pour $x = -10$, on obtient $-22 \leq -24$, ce qui est faux. Les solutions sont les nombres $x \geq -8$.

Réponse. $x \geq -8$.

Correction de l’exercice 4 – Avec des fractions

On multiplie les deux membres par 6, multiple commun de 3 et de 2. Comme 6 est positif, le sens de l’inégalité est conservé :

$$2(x + 1) > 3(x - 2)$$

On développe : $2x + 2 > 3x - 6$. On retranche $2x$ pour garder un coefficient positif, puis on ajoute 6 : $8 > x$, c’est-à-dire $x < 8$.

Les solutions sont les nombres strictement inférieurs à 8, le nombre 8 étant exclu car l’inégalité est stricte.

Contrôle : pour $x = 8$, les deux membres valent 3, il y a égalité, ce qui confirme la borne ; pour $x = 0$, $\frac{1}{3} > -1$ est vrai ; pour $x = 20$, $7 > 9$ est faux. Les solutions sont les nombres $x < 8$.

Réponse. $x < 8$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Représenter sur une droite graduée

On repère d’abord la borne, puis on se demande si elle est incluse (≤ ou ≥) ou exclue (< ou >).

a) Les nombres strictement supérieurs à -4 : sur la droite, on colore la partie située à droite de -4, avec un crochet tourné vers l’extérieur (ou un point vide) en -4, qui n’est pas solution.

b) Les nombres inférieurs ou égaux à 7 : on colore à gauche de 7, avec un crochet tourné vers les solutions (ou un point plein) en 7, qui est solution.

c) Les nombres compris entre -1 inclus et 5 exclu : on colore le segment de -1 à 5, avec un crochet fermé en -1 et ouvert en 5.

Pour c), les entiers qui conviennent sont

$$-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

soit 6 entiers : 5 n’en fait pas partie, car l’inégalité $x < 5$ est stricte.

Réponse. a) à droite de -4, exclu · b) à gauche de 7, inclus · c) de -1 (inclus) à 5 (exclu) ; entiers -1 à 4.

Correction de l’exercice 6 – Double inégalité

Une double inégalité se traite en une fois : on applique la même opération aux **trois** membres, en gardant $2x - 1$ au milieu.

On ajoute 1 partout : $-2 \leq 2x \leq 8$. On divise les trois membres par 2, positif, donc les sens sont conservés :

$$-1 \leq x \leq 4$$

Les solutions sont les nombres compris entre -1 et 4, bornes incluses. On obtient le même résultat en résolvant séparément $2x - 1 \geq -3$ (d’où $x \geq -1$) et $2x - 1 \leq 7$ (d’où $x \leq 4$), puis en gardant les nombres qui vérifient les deux.

Contrôle : pour $x = -1$, $2x - 1 = -3$; pour $x = 4$, $2x - 1 = 7$: les deux bornes sont atteintes, donc incluses. Pour $x = 5$, on obtient $9 > 7$. Les solutions sont les nombres compris entre -1 et 4.

Réponse. $-1 \leq x \leq 4$.

Correction de l’exercice 7 – Combien d’entiers ?

On résout chaque inéquation séparément, puis on garde les nombres qui vérifient les deux conditions.

La première, $2x + 1 < 11$, donne $2x < 10$, soit $x < 5$. La seconde est déjà résolue : $x > -2$. Les deux conditions ensemble s’écrivent

$$-2 < x < 5$$

Les deux bornes sont exclues : -2 ne vérifie pas $x > -2$, et 5 donne $2 \times 5 + 1 = 11$, qui n’est pas strictement inférieur à 11.

Les entiers qui conviennent sont -1, 0, 1, 2, 3 et 4. Sans la condition « entier », il y aurait une infinité de solutions, comme 3,5.

Contrôle avec $x = 4$: $9 < 11$ et $4 > -2$. Il y a 6 **entiers** solutions.

Réponse. $-2 < x < 5$: les entiers -1, 0, 1, 2, 3 et 4, soit 6 valeurs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 8 – Le piège du signe

L’élève a bien commencé : en retranchant 2, on obtient $-5x \geq 15$. L’erreur arrive ensuite. Pour isoler x, il faut diviser par -5, qui est **négatif** : le sens de l’inégalité doit changer.

$$x \leq \frac{15}{-5} = -3$$

Sa réponse contient des nombres qui ne conviennent pas : $x = 0$ vérifie $x \geq -3$, mais donne $2 \geq 17$, ce qui est faux.

Pour éviter ce piège, on peut ajouter $5x$ aux deux membres : $2 \geq 5x + 17$, puis $-15 \geq 5x$, et diviser par 5, positif, donne $-3 \geq x$.

Contrôle : $x = -3$ donne $15 + 2 = 17$, l’égalité est atteinte ; $x = -10$ donne $52 \geq 17$, vrai. Les solutions sont les nombres $x \leq -3$.

Réponse. $x \leq -3$: diviser par -5 retourne l’inégalité.

Correction de l’exercice 9 – Aucune solution ou toutes

Dans ces deux inéquations, le terme en x disparaît quand on regroupe : c’est la comparaison des nombres restants qui décide.

a) En retranchant $3x$, il reste $2 > 5$, ce qui est faux pour toute valeur de x : l’inéquation n’a **aucune** solution. Le membre de droite dépasse toujours celui de gauche de 3.

b) On développe : $2x + 2 \leq 2x + 5$. En retranchant $2x$, il reste

$$2 \leq 5$$

ce qui est toujours vrai : **tout** nombre est solution, les solutions sont tous les nombres.

Contrôle : en a), $x = 100$ donne $302 > 305$, faux ; en b), $x = -50$ donne $-98 \leq -95$, vrai. Conclusion : a) n’a aucune solution, b) est vérifiée par tous les nombres.

Réponse. a) aucune solution · b) tout nombre est solution.

Correction de l’exercice 10 – La note minimale

La somme des quatre notes vaut $12 + 9 + 14 + 11 = 46$. On note x la cinquième note : la moyenne des cinq notes est $\frac{46 + x}{5}$, et l’on veut qu’elle soit au moins égale à 12.

$$\frac{46 + x}{5} \geq 12$$

On multiplie par 5, positif, donc le sens est conservé : $46 + x \geq 60$, d’où $x \geq 14$. Comme une note ne dépasse pas 20, les notes possibles vont de 14 à 20.

Contrôle : avec 14, le total vaut 60 et la moyenne $\frac{60}{5} = 12$, l’objectif est tout juste atteint ; avec 13, la moyenne n’est que $\frac{59}{5} = 11{,}8$. L’élève doit obtenir **au moins** 14.

Réponse. Au moins 14 : la moyenne vaut alors exactement 12.

Correction de l’exercice 11 – La carte de cinéma

On note x le nombre de séances. Sans carte, on paie $10{,}5x$ euros ; avec la carte, $18 + 6x$ euros. La carte est rentable quand elle ne coûte pas plus cher :

$$18 + 6x \leq 10{,}5x$$

On retranche $6x$: $18 \leq 4{,}5x$. On divise par 4,5, positif : $x \geq \frac{18}{4{,}5} = 4$.

À 4 séances, les deux formules coûtent exactement 42 € ; à partir de 5 séances, la carte

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

fait réellement économiser, et l'économie grandit de 4,50 € à chaque séance supplémentaire.

Contrôle à 3 séances : 31,50 € sans carte contre 36 € avec, la carte est plus chère. La carte est rentable **à partir de** 4 **séances**.

Réponse. À partir de 4 séances (coût commun 42 €).

Correction de l'exercice 12 – Le périmètre limité

Le périmètre d'un rectangle vaut deux fois la somme de sa longueur et de sa largeur : $2[(x+3)+4] = 2x+14$. Il ne doit pas dépasser 30 cm.

$$2x + 14 \leq 30$$

On retranche 14 : $2x \leq 16$, puis on divise par 2 : $x \leq 8$. Comme x est positif, les valeurs possibles vérifient $0 < x \leq 8$.

L'aire vaut $4(x+3)$: elle augmente quand x augmente, elle est donc maximale pour la plus grande valeur permise, $x = 8$. Le rectangle mesure alors 11 cm sur 4 cm et son aire vaut $4 \times 11 = 44$ cm².

Contrôle : $2 \times (11 + 4) = 30$ cm, le périmètre atteint juste la limite. On a $0 < x \leq 8$ et l'aire maximale vaut 44 **cm²**.

Réponse. $0 < x \leq 8$; l'aire maximale vaut 44 cm² (rectangle 11×4).

Correction de l'exercice 13 – Le budget de rentrée

On note n le nombre de cahiers. La dépense totale vaut $18 + 3{,}5n$ euros et ne doit pas dépasser 50 €.

$$18 + 3{,}5n \leq 50$$

On retranche 18 : $3{,}5n \leq 32$. On divise par 3,5, positif : $n \leq \dfrac{32}{3{,}5} \approx 9{,}14$.

Le nombre de cahiers est un entier, et il doit rester **inférieur** à 9,14 : le plus grand entier possible est 9. On arrondit vers le bas, car 10 cahiers dépasseraient le budget.

Contrôle : avec 9 cahiers, $18 + 31{,}50 = 49{,}50$ € ; avec 10, $18 + 35 = 53$ €, trop cher. On peut acheter 9 **cahiers au maximum**.

Réponse. 9 cahiers, pour un total de 49,50 €.

Correction de l'exercice 14 – La livraison offerte

On note n le nombre d'articles commandés. Le montant vaut $7{,}2n$ euros et doit atteindre au moins 60 €.

$$7{,}2n \geq 60$$

On divise par 7,2, positif : $n \geq \dfrac{60}{7{,}2} \approx 8{,}33$.

n est un entier qui doit être **supérieur** à 8,33 : le plus petit possible est 9. Cette fois on arrondit vers le haut, car 8 articles ne suffisent pas. C'est le sens de l'inégalité, et non la valeur décimale, qui décide du sens de l'arrondi.

Contrôle : 8 articles font 57,60 €, il manque 2,40 € ; 9 articles font 64,80 €, au-dessus du seuil. Il faut commander **au moins** 9 **articles**.

Réponse. 9 articles, soit 64,80 € de commande.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Deux conditions à la fois

On résout chaque inéquation, puis on garde les nombres qui vérifient les deux.

La première, $3x - 4 \leq 11$, donne $3x \leq 15$, soit $x \leq 5$. La seconde, $x + 6 > 1$, donne $x > -5$. Ensemble :

$$-5 < x \leq 5$$

La borne 5 est incluse, car la première inégalité est large : $3 \times 5 - 4 = 11$ convient. La borne -5 est exclue, car $-5 + 6 = 1$ n’est pas strictement supérieur à 1.

Les solutions vérifient $-5 < x \leq 5$; les entiers qui conviennent vont de -4 à 5, soit 10 entiers.

Contrôle avec $x = 0$: $-4 \leq 11$ et $6 > 1$. Les nombres cherchés vérifient $-5 < x \leq 5$.

Réponse. $-5 < x \leq 5$.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : quatre inéquations

On résout chaque inéquation en repérant à chaque division le signe du nombre utilisé.

a) On retranche 7 : $-x \leq -5$. Multiplier par -1 change le sens : $x \geq 5$.

b) On multiplie par 4, positif : $2x - 3 > 4$, donc $2x > 7$ et $x > 3{,}5$.

c) On développe : $-3x + 6 < 9$, donc $-3x < 3$. Diviser par -3 change le sens : $x > -1$.

d) On retranche $8x$ puis 8 : $-3x \geq -15$. Diviser par -3 change le sens :

$$x \leq 5$$

Contrôle de d) : pour $x = 5$, les deux membres valent 33 ; pour $x = 6$, $38 \geq 41$ est faux. Trois des quatre inéquations ont demandé un changement de sens.

Réponse. a) $x \geq 5$ · b) $x > 3{,}5$ · c) $x > -1$ · d) $x \leq 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).