

Plaque 5 – Mise en équation : problèmes de synthèse

Équations et inéquations — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les cinq étapes.

Étape	Ce qu'on écrit
choisir l'inconnue	« Soit x le nombre de ... », avec l'unité
exprimer les données	chaque grandeur en fonction de x
poser l'équation	traduire la phrase clé de l'énoncé
résoudre	technique du chapitre
conclure	une phrase, avec l'unité, et une vérification

Traduire les tournures courantes.

Énoncé	Écriture
le double de x	$2x$
x augmenté de 7	$x + 7$
7 de plus que x	$x + 7$
le triple de x diminué de 4	$3x - 4$
le triple de la différence de x et 4	$3(x - 4)$
trois entiers consécutifs	$n - 1, n, n + 1$
une remise de 25 %	on multiplie par 0,75
une hausse de 8 %	on multiplie par 1,08

Vérifier que la réponse a un sens. Une longueur, un effectif, une durée et un prix sont **positifs** ; un nombre d'objets est **entier**. Une solution mathématique qui échoue à ce test se rejette explicitement.

Grandeurs usuelles. Périmètre d'un rectangle $2(L + l)$; aire Ll ; volume d'un pavé Llh ; somme des angles d'un triangle 180° ; moyenne = somme divisée par l'effectif.

Correction de l'exercice 1 – Deux nombres liés

- **Inconnue** : x , le premier nombre ✓
- **Second nombre** : $2x - 6$ ✓
- **Équation** : $x + (2x - 6) = 84$ ✓
- **Réduction** : $3x - 6 = 84$ ✓
- **On ajoute 6** : $3x = 90$ ✓
- **Premier nombre** :

$$x = 30$$

- **Second nombre** : $2 \times 30 - 6$ ✓
- **Résultat** :

- **Vérification de la somme** : $30 + 54 = 84$ ✓
 - **Vérification de la condition** : $2 \times 30 - 6 = 54$ ✓
 - **Les deux conditions sont remplies** ✓
 - **Écart entre les deux nombres** : 24 ✓
 - **Contrôle avec l'autre inconnue** : si y est le second, alors $x = \frac{y+6}{2}$ ✓
 - **Équation** : $\frac{y+6}{2} + y = 84$ ✓
 - **Résolution** : $y + 6 + 2y = 168$, donc $3y = 162$ ✓
 - **Solution** : $y = 54$ ✓
 - **Concordance** ✓
- Réponse.** 30 et 54.

Correction de l'exercice 2 - Trois entiers consécutifs

- **Écriture centrée** : $n - 1$, n et $n + 1$ ✓
- **Somme** : $(n - 1) + n + (n + 1)$ ✓
- **Réduction** : $3n$ ✓
- **Simplification remarquable** : les termes -1 et $+1$ s'annulent ✓
- **Équation** : $3n = 153$ ✓
- **Solution** :

$n = 51$
- **Les trois entiers** : 50, 51 et 52 ✓
- **Vérification** : $50 + 51 + 52 = 153$ ✓
- **Remarque** : l'entier du milieu est la **moyenne** des trois ✓
- **Contrôle** : $\frac{153}{3} = 51$ ✓
- **Méthode alternative** : poser n , $n + 1$, $n + 2$ ✓
- **Équation** : $3n + 3 = 153$ ✓
- **Résolution** : $3n = 150$, donc $n = 50$ ✓
- **Concordance** : on retrouve 50, 51, 52 ✓
- **Avantage de l'écriture centrée** : le calcul est plus court ✓
- **Cas impossible** : une somme de 154 ✓
- **Raison** : 154 n'est pas un multiple de 3 ✓

Réponse. 50, 51 et 52.

Correction de l'exercice 3 - Le rectangle

- **Inconnue** : ℓ , la largeur en centimètres ✓
- **Longueur** : $\ell + 7$ ✓
- **Périmètre** : $2[\ell + (\ell + 7)]$ ✓
- **Réduction du crochet** : $2\ell + 7$ ✓
- **Équation** : $2(2\ell + 7) = 62$ ✓
- **On divise par 2** : $2\ell + 7 = 31$ ✓
- **On retranche 7** : $2\ell = 24$ ✓
- **Largeur** :

$\ell = 12$ cm
- **Longueur** : $12 + 7$ ✓

— **Résultat :**

$$19 \text{ cm}$$

— **Vérification du périmètre :** $2 \times 31 = 62 \text{ cm} \checkmark$

— **Vérification de l'écart :** $19 - 12 = 7 \text{ cm} \checkmark$

— **Aire :** $19 \times 12 \checkmark$

— **Résultat :**

$$228 \text{ cm}^2$$

— **Contrôle du positif :** les deux dimensions le sont $\checkmark$

— **Longueur de la diagonale :** $\sqrt{19^2 + 12^2} \checkmark$

— **Calcul :** $361 + 144 = 505 \checkmark$

— **Valeur approchée :** $\approx 22,47 \text{ cm} \checkmark$

Réponse. Largeur 12 cm, longueur 19 cm, aire 228 cm².

Correction de l'exercice 4 - Le partage inégal

— **Inconnue :** x , la part de la première en euros $\checkmark$

— **Deuxième part :** $2x \checkmark$

— **Troisième part :** $x + 30 \checkmark$

— **Équation :** $x + 2x + (x + 30) = 250 \checkmark$

— **Réduction :** $4x + 30 = 250 \checkmark$

— **On retranche 30 :** $4x = 220 \checkmark$

— **Première part :**

$$x = 55 \text{ €}$$

— **Deuxième part :** $2 \times 55 = 110 \text{ €} \checkmark$

— **Troisième part :** $55 + 30 = 85 \text{ €} \checkmark$

— **Vérification du total :** $55 + 110 + 85 \checkmark$

— **Total :** $250 \text{ €} \checkmark$

— **Vérification de la deuxième condition :** $110 = 2 \times 55 \checkmark$

— **Vérification de la troisième :** $85 - 55 = 30 \text{ €} \checkmark$

— **Toutes les conditions sont remplies $\checkmark$**

— **Part la plus élevée :** la deuxième $\checkmark$

— **Proportion de la deuxième :** $\frac{110}{250} = 44 \% \checkmark$

— **Proportion de la première :** $22 \% \checkmark$

— **Proportion de la troisième :** $34 \% \checkmark$

— **Contrôle :** $44 + 22 + 34 = 100 \checkmark$

Réponse. 55 €, 110 € et 85 €.

Correction de l'exercice 5 - Une histoire d'âges

— **Inconnue :** x , le nombre d'années à attendre $\checkmark$

— **Âge de la mère :** $42 + x \checkmark$

— **Âge de la fille :** $12 + x \checkmark$

— **Condition :** $42 + x = 2(12 + x) \checkmark$

— **Développement :** $42 + x = 24 + 2x \checkmark$

— **On retranche x :** $42 = 24 + x \checkmark$

— **Solution :**

$$x = 18 \text{ ans}$$

- **Âge de la mère** : $42 + 18 = 60$ ans ✓
- **Âge de la fille** : $12 + 18 = 30$ ans ✓
- **Vérification** : $2 \times 30 = 60$ ✓
- **Condition remplie** ✓
- **Écart d'âge** : 30 ans, invariable ✓
- **Piège** : croire que l'écart change avec le temps ✓
- **Question voisine** : l'âge de la mère a-t-il été le triple ? ✓
- **Équation** : $42 + x = 3(12 + x)$ ✓
- **Résolution** : $42 + x = 36 + 3x$, donc $x = 3$ ✓
- **Vérification** : 45 et 15, et $3 \times 15 = 45$ ✓
- **Interprétation** : ce sera dans 3 ans, pas dans le passé ✓

Réponse. Dans 18 ans : 60 ans et 30 ans.

Correction de l'exercice 6 - Deux marcheurs

- **Inconnue** : t , la durée en heures ✓
- **Distance parcourue par le premier** : $5t$ ✓
- **Distance parcourue par le second** : $7t$ ✓
- **Condition de rencontre** : la somme vaut 24 ✓
- **Équation** : $5t + 7t = 24$ ✓
- **Réduction** : $12t = 24$ ✓
- **Solution** :

$$t = 2 \text{ heures}$$

- **Distance parcourue par le premier** : 5×2 ✓
- **Résultat** :

$$10 \text{ km}$$

- **Distance parcourue par le second** : $7 \times 2 = 14$ km ✓
- **Vérification** : $10 + 14 = 24$ km ✓
- **Interprétation** : la rencontre a lieu à 10 km du premier village ✓
- **Lecture directe** : leur vitesse de rapprochement vaut 12 km/h ✓
- **Durée** : $\frac{24}{12} = 2$ h ✓
- **Concordance** ✓
- **Variante** : s'ils partaient dans le même sens ✓
- **Vitesse d'écart** : 2 km/h ✓
- **Écart après 2 h** : 4 km ✓

Réponse. Au bout de 2 h, à 10 km du premier village.

Correction de l'exercice 7 - Le prix avant remise

- **Inconnue** : p , le prix initial en euros ✓
- **Coefficient multiplicateur** : $1 - 0,25 = 0,75$ ✓
- **Équation** : $0,75p = 48$ ✓
- **On divise par 0,75** ✓
- **Prix initial** :

$$p = 64 \text{ €}$$

- **Vérification de la remise** : 25 % de 64 vaut 16 € ✓
- **Prix remisé** : $64 - 16 = 48$ € ✓
- **Vérification réussie** ✓
- **Erreur classique** : ajouter 25 % à 48 € ✓
- **Ce que cela donnerait** : $48 \times 1,25 = 60$ € ✓
- **Pourquoi c'est faux** : les 25 % portent sur le prix **initial**, pas sur le prix remisé ✓
- **Contrôle** : 25 % de 60 vaut 15, et $60 - 15 = 45 \neq 48$ ✓
- **Coefficient inverse** : $\frac{1}{0,75} \approx 1,3333$ ✓
- **Contrôle** : $48 \times 1,3333 \approx 64$ € ✓
- **Remise en euros** : 16 € ✓
- **Part de la remise sur le prix payé** : $\frac{16}{48} \approx 33,3\%$ ✓
- **Leçon** : une remise de 25 % représente 33 % du prix payé ✓

Réponse. 64 € : $0,75 \times 64 = 48$.

Correction de l'exercice 8 - Après une hausse

- **Inconnue** : p , le prix avant hausse ✓
- **Coefficient multiplicateur** : $1 + 0,08 = 1,08$ ✓
- **Équation** : $1,08p = 135$ ✓
- **On divise par 1,08** ✓
- **Prix initial** :

$$p = 125 \text{ €}$$
- **Vérification de la hausse** : 8 % de 125 vaut 10 € ✓
- **Nouveau prix** : $125 + 10 = 135$ € ✓
- **Vérification réussie** ✓
- **Erreur classique** : retrancher 8 % de 135 ✓
- **Ce que cela donnerait** : $135 \times 0,92 = 124,20$ € ✓
- **Écart avec la vraie réponse** : 0,80 € ✓
- **Pourquoi c'est faux** : les 8 % portent sur l'ancien prix ✓
- **Hausse en euros** : 10 € ✓
- **Taux ramené au nouveau prix** : $\frac{10}{135} \approx 7,4\%$ ✓
- **Revenir au prix initial** : il faudrait une baisse de 7,4 % ✓
- **Contrôle** : $135 \times \frac{100}{108} = 125$ € ✓
- **Règle** : hausse et baisse qui s'annulent n'ont pas le même taux ✓

Réponse. 125 € : $1,08 \times 125 = 135$.

Correction de l'exercice 9 - Le rectangle d'aire donnée

- **Longueur** : x ✓
- **Largeur** : $x - 5$ ✓
- **Contrainte** : $x > 5$ pour que la largeur soit positive ✓
- **Aire** : $x(x - 5)$ ✓
- **Équation** : $x(x - 5) = 84$ ✓
- **Développement** : $x^2 - 5x = 84$ ✓
- **Passage à zéro** : $x^2 - 5x - 84 = 0$ ✓

- **Recherche** : deux nombres de produit -84 et de somme -5 ✓
- **Décomposition de 84** : $84 = 12 \times 7$ ✓
- **Candidats** : -12 et 7 ✓
- **Somme** : -5 ✓
- **Factorisation** :

$$(x - 12)(x + 7) = 0$$

- **Contrôle du développement** : $x^2 + 7x - 12x - 84 = x^2 - 5x - 84$ ✓
- **Première solution** : $x = 12$ ✓
- **Seconde solution** : $x = -7$ ✓
- **Rejet** : une longueur ne peut pas être négative ✓
- **Longueur retenue** :

$$12 \text{ cm}$$

- **Largeur** : $12 - 5 = 7 \text{ cm}$ ✓
- **Vérification de l'aire** : $12 \times 7 = 84 \text{ cm}^2$ ✓
- **Périmètre** : $2 \times 19 = 38 \text{ cm}$ ✓

Réponse. Longueur 12 cm, largeur 7 cm.

Correction de l'exercice 10 - Les angles du triangle

- **Inconnue** : x , la mesure du premier angle ✓
- **Deuxième angle** : $2x$ ✓
- **Troisième angle** : $x + 20$ ✓
- **Propriété** : la somme des angles d'un triangle vaut 180° ✓
- **Équation** : $x + 2x + (x + 20) = 180$ ✓
- **Réduction** : $4x + 20 = 180$ ✓
- **On retranche 20** : $4x = 160$ ✓
- **Premier angle** :

$$x = 40^\circ$$

- **Deuxième angle** : 80° ✓
- **Troisième angle** : 60° ✓
- **Vérification** : $40 + 80 + 60 = 180$ ✓
- **Nature du triangle** : les trois angles sont aigus ✓
- **Conclusion** : le triangle est **acutangle** ✓
- **Est-il isocèle ?** Non, les trois angles diffèrent ✓
- **Angle le plus grand** : 80° ✓
- **Côté le plus long** : celui qui lui est opposé ✓
- **Contrôle de cohérence** : chaque angle est strictement positif ✓
- **Contrôle** : chaque angle est inférieur à 180° ✓

Réponse. 40° , 80° et 60° .

Correction de l'exercice 11 - Un programme à rebours

- **Inconnue** : x , le nombre de départ ✓
- **Après la multiplication par 4** : $4x$ ✓
- **Après la soustraction** : $4x - 7$ ✓
- **Après la multiplication par 3** : $3(4x - 7)$ ✓

- **Équation** : $3(4x - 7) = 51$ ✓
- **On divise par 3** : $4x - 7 = 17$ ✓
- **On ajoute 7** : $4x = 24$ ✓
- **Solution** :

$$x = 6$$

- **Vérification, étape 1** : $4 \times 6 = 24$ ✓
- **Étape 2** : $24 - 7 = 17$ ✓
- **Étape 3** : $17 \times 3 = 51$ ✓
- **Vérification réussie** ✓
- **Méthode alternative** : remonter le programme à l'envers ✓
- **On divise 51 par 3** : 17 ✓
- **On ajoute 7** : 24 ✓
- **On divise par 4** : 6 ✓
- **Concordance** ✓
- **Remarque** : à chaque étape, on applique l'opération **inverse**, dans l'ordre inverse ✓
- **Limite de cette méthode** : elle échoue si l'inconnue apparaît deux fois ✓

Réponse. 6.

Correction de l'exercice 12 - Pièces de 2 € et de 5 €

- **Inconnue** : x , le nombre de pièces de 2 € ✓
- **Nombre de billets de 5 €** : $23 - x$ ✓
- **Valeur des pièces** : $2x$ ✓
- **Valeur des billets** : $5(23 - x)$ ✓
- **Équation** : $2x + 5(23 - x) = 82$ ✓
- **Développement** : $2x + 115 - 5x = 82$ ✓
- **Réduction** : $115 - 3x = 82$ ✓
- **On retranche 115** : $-3x = -33$ ✓
- **On divise par -3** :

$$x = 11$$

- **Nombre de billets** : $23 - 11 = 12$ ✓
- **Vérification du nombre total** : $11 + 12 = 23$ ✓
- **Valeur des pièces** : $11 \times 2 = 22$ € ✓
- **Valeur des billets** : $12 \times 5 = 60$ € ✓
- **Total** : $22 + 60 = 82$ € ✓
- **Vérification réussie** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : les deux effectifs sont des entiers positifs ✓
- **Cas limite** : 23 pièces de 2 € donneraient 46 € ✓
- **Autre cas limite** : 23 billets de 5 € donneraient 115 € ✓
- **Cohérence** : 82 est bien compris entre 46 et 115 ✓

Réponse. 11 pièces de 2 € et 12 billets de 5 €.

Correction de l'exercice 13 - Deux forfaits téléphoniques

- **Inconnue** : t , la durée en minutes ✓
- **Prix du forfait A** : $12 + 0,3t$ ✓
- **Prix du forfait B** : $20 + 0,1t$ ✓

- **Équation** : $12 + 0,3t = 20 + 0,1t$ ✓
 - **On retranche** $0,1t$: $12 + 0,2t = 20$ ✓
 - **On retranche** 12 : $0,2t = 8$ ✓
 - **Solution** :

$$t = 40 \text{ minutes}$$
 - **Prix commun avec A** : $12 + 12 = 24$ € ✓
 - **Prix commun avec B** : $20 + 4 = 24$ € ✓
 - **Égalité vérifiée** ✓
 - **Différence de prix** : $(12 + 0,3t) - (20 + 0,1t)$ ✓
 - **Réduction** : $0,2t - 8$ ✓
 - **Signe** : négatif si $t < 40$ ✓
 - **Conclusion** : en dessous de 40 min, le forfait **A** est moins cher ✓
 - **Contrôle à 20 min** : A donne 18 €, B donne 22 € ✓
 - **Au-delà de 40 min** : le forfait **B** devient avantageux ✓
 - **Contrôle à 100 min** : A donne 42 €, B donne 30 € ✓
 - **Économie** : 12 € ✓
 - **Conseil pratique** : estimer sa consommation mensuelle avant de choisir ✓
- Réponse.** 40 minutes, pour 24 € dans les deux cas.

Correction de l'exercice 14 - La boîte de base carrée

- **Aire de la base** : x^2 ✓
 - **Volume** : $6x^2$ ✓
 - **Équation** : $6x^2 = 384$ ✓
 - **On divise par 6** : $x^2 = 64$ ✓
 - **Deux solutions mathématiques** : 8 et -8 ✓
 - **Rejet** : une longueur est positive ✓
 - **Côté** :

$$x = 8 \text{ cm}$$
 - **Vérification du volume** : $64 \times 6 = 384 \text{ cm}^3$ ✓
 - **Aire des deux bases** : $2 \times 64 = 128 \text{ cm}^2$ ✓
 - **Aire d'une face latérale** : $8 \times 6 = 48 \text{ cm}^2$ ✓
 - **Nombre de faces latérales** : 4 ✓
 - **Aire latérale** : $4 \times 48 = 192 \text{ cm}^2$ ✓
 - **Aire totale** : $128 + 192$ ✓
 - **Résultat** :

$$320 \text{ cm}^2$$
 - **Contrôle par la formule** : $2x^2 + 4 \times 6x$ ✓
 - **Calcul** : $128 + 192 = 320$ ✓
 - **Concordance** ✓
 - **Volume en litres** : $384 \text{ cm}^3 = 0,384 \text{ L}$ ✓
 - **Ordre de grandeur** : un peu plus d'un tiers de litre ✓
- Réponse.** $x = 8 \text{ cm}$; aire totale 320 cm^2 .

Correction de l'exercice 15 - Les deux citernes

- **Inconnue** : d , le nombre de jours ✓
- **Contenu de la première** : $500 - 12d$ ✓
- **Contenu de la seconde** : $200 + 8d$ ✓
- **Équation** : $500 - 12d = 200 + 8d$ ✓
- **On ajoute** $12d$: $500 = 200 + 20d$ ✓
- **On retranche** 200 : $300 = 20d$ ✓
- **Solution** :

$$d = 15 \text{ jours}$$

- **Contenu de la première** : $500 - 180$ ✓
- **Résultat** :

$$320 \text{ L}$$

- **Contenu de la seconde** : $200 + 120 = 320 \text{ L}$ ✓
- **Égalité vérifiée** ✓
- **Vitesse de rapprochement** : $12 + 8 = 20 \text{ L par jour}$ ✓
- **Écart initial** : $500 - 200 = 300 \text{ L}$ ✓
- **Lecture directe** : $\frac{300}{20} = 15 \text{ jours}$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Quand la première sera-t-elle vide ?** $\frac{500}{12} \approx 41,7 \text{ jours}$ ✓
- **Interprétation** : au 42^e jour ✓
- **Contenu de la seconde à ce moment** : $200 + 8 \times 41,7 \approx 533 \text{ L}$ ✓
- **Remarque** : le modèle suppose des débits constants ✓

Réponse. Au bout de 15 jours, à 320 L chacune.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : le potager

- a) **Dimensions extérieures** : l'allée s'ajoute des deux côtés ✓

- **Longueur** : $18 + 2x$ ✓
- **Largeur** : $12 + 2x$ ✓
- **Aire totale** : $(18 + 2x)(12 + 2x)$ ✓
- **Développement** : $216 + 36x + 24x + 4x^2$ ✓
- **Forme réduite** :

$$4x^2 + 60x + 216$$

- **Contrôle en** $x = 0$: 216 m^2 , l'aire du potager ✓

- b) **Équation** : $4x^2 + 60x + 216 = 352$ ✓

- **Passage à zéro** : $4x^2 + 60x - 136 = 0$ ✓
- **On divise par 4** : $x^2 + 15x - 34 = 0$ ✓
- **Recherche** : deux nombres de produit -34 et de somme 15 ✓
- **Décomposition de 34** : $34 = 2 \times 17$ ✓
- **Candidats** : -2 et 17 ✓
- **Produit** : -34 ✓
- **Somme** : 15 ✓
- **Factorisation** :

$$(x - 2)(x + 17) = 0$$

- **Contrôle du développement** : $x^2 + 17x - 2x - 34 = x^2 + 15x - 34$ ✓
- **Première solution** : $x = 2$ ✓
- **Seconde solution** : $x = -17$ ✓
- **Rejet** : une largeur d'allée ne peut pas être négative ✓
- **Valeur retenue** :

$$x = 2 \text{ m}$$

- **Dimensions extérieures** : 22 m sur 16 m ✓
- **Contrôle de l'aire** : $22 \times 16 = 352 \text{ m}^2$ ✓
- **Vérification réussie** ✓

c) **Aire de l'allée** : aire totale moins aire du potager ✓

- **Calcul** : $352 - 216$ ✓
- **Résultat** :

$$136 \text{ m}^2$$

- **Contrôle par la formule** : $4x^2 + 60x$ ✓
- **Calcul** : $16 + 120 = 136$ ✓
- **Concordance** ✓

d) **Dimensions extérieures** : 22 m sur 16 m ✓

- **Demi-périmètre** : $22 + 16 = 38 \text{ m}$ ✓
- **Périmètre** : 2×38 ✓
- **Longueur de grillage** :

$$76 \text{ m}$$

- **Dépense** : 76×9 ✓
- **Résultat** :

$$684 \text{ €}$$

- **Contrôle de l'ordre de grandeur** : 76 m à 9 € font un peu moins de 700 € ✓
- **Périmètre du potager seul** : $2 \times 30 = 60 \text{ m}$ ✓
- **Coût correspondant** : 540 € ✓
- **Surcoût dû à l'allée** : $684 - 540 = 144 \text{ €}$ ✓
- **Remarque** : élargir l'allée de 1 m ajoute 8 m de grillage ✓
- **Coût de ce mètre supplémentaire** : 72 € ✓

Réponse. a) $4x^2 + 60x + 216$ · b) $x = 2 \text{ m}$ · c) 136 m^2 · d) 684 €.