Plaquette 5 – Mise en équation : problèmes de synthèse

Équations et inéquations — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les cinq étapes.

Étape	Ce qu'on écrit
choisir l'inconnue	« Soit x le nombre de … », avec l'unité
exprimer les données	chaque grandeur en fonction de x
poser l'équation	traduire la phrase clé de l'énoncé
résoudre	technique du chapitre
conclure	une phrase, avec l'unité, et une vérification

Traduire les tournures courantes.

Énoncé	Écriture
le double de x	$2x$
x augmenté de 7	$x+7$
7 de plus que x	$x+7$
le triple de x diminué de 4	$3x-4$
le triple de la différence de x et 4	$3(x-4)$
trois entiers consécutifs	$n-1$, n, $n+1$
une remise de 25 %	on multiplie par 0,75
une hausse de 8 %	on multiplie par 1,08

Exemple. « Le triple d'un nombre, diminué de 4, vaut 11 » se traduit, en notant x ce nombre, par

$$3x-4=11$$

d'où $3x=15$ et $x=5$; on vérifie : $3\times5-4=11$.

Vérifier que la réponse a un sens. Une longueur, un effectif, une durée et un prix sont **positifs** ; un nombre d'objets est **entier**. Une solution mathématique qui échoue à ce test se rejette explicitement.

Grandeurs usuelles. Périmètre d'un rectangle $2(L+\ell)$; aire $L\ell$; volume d'un pavé $L\ell h$; somme des angles d'un triangle 180° ; moyenne = somme divisée par l'effectif.

Correction de l'exercice 1 – Deux nombres liés

On note x le premier nombre. Le second est « le double du premier diminué de 6 », soit $2x-6$. Leur somme vaut 84 :

$$x+(2x-6)=84$$

On réduit : $3x-6=84$. On ajoute 6 : $3x=90$, donc $x=30$. Le second nombre vaut $2\times30-6=54$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On peut aussi prendre le second nombre y comme inconnue : le premier vaut alors $\frac{y+6}{2}$, et l'on retrouve $y = 54$, avec un calcul plus long. Il vaut mieux choisir comme inconnue la quantité à partir de laquelle on exprime les autres.

Contrôle : $30 + 54 = 84$ et $2 \times 30 - 6 = 54$, les deux conditions sont remplies. Les deux nombres sont 30 **et** 54.

Réponse. 30 et 54.

Correction de l'exercice 2 – Trois entiers consécutifs

On écrit les trois entiers consécutifs autour de celui du milieu : $n - 1$, n et $n + 1$. Ce choix simplifie la somme, car les termes -1 et $+1$ s'annulent.

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n = 153$$

On divise par 3 : $n = 51$. Les trois entiers sont donc 50, 51 et 52. L'entier du milieu est la moyenne des trois : $\frac{153}{3} = 51$.

Avec l'écriture n, $n + 1$, $n + 2$, on obtient $3n + 3 = 153$, puis $n = 50$: même résultat, un peu plus long. On voit aussi qu'une somme de 154 serait impossible, car 154 n'est pas un multiple de 3.

Contrôle : $50 + 51 + 52 = 153$. Les entiers cherchés sont 50**,** 51 **et** 52.

Réponse. 50, 51 et 52.

Correction de l'exercice 3 – Le rectangle

On note ℓ la largeur en centimètres ; la longueur mesure alors $\ell + 7$. Le périmètre vaut deux fois la somme de la longueur et de la largeur :

$$2[\ell + (\ell + 7)] = 62$$

On divise par 2 : $2\ell + 7 = 31$. On retranche 7 : $2\ell = 24$, donc $\ell = 12$ cm. La longueur mesure $12 + 7 = 19$ cm.

L'aire vaut alors $19 \times 12 = 228$ cm².

Contrôle : $2 \times (19 + 12) = 2 \times 31 = 62$ cm, et $19 - 12 = 7$ cm. Le rectangle mesure 12 **cm sur** 19 **cm** et son aire vaut 228 **cm²**.

Réponse. Largeur 12 cm, longueur 19 cm, aire 228 cm².

Correction de l'exercice 4 – Le partage inégal

On exprime toutes les parts à partir de celle de la première personne, notée x (en euros) : la deuxième reçoit $2x$ et la troisième $x + 30$. Les trois parts font 250 € :

$$x + 2x + (x + 30) = 250$$

On réduit : $4x + 30 = 250$. On retranche 30 : $4x = 220$, donc $x = 55$.

La première reçoit 55 €, la deuxième $2 \times 55 = 110$ € et la troisième $55 + 30 = 85$ €.

Contrôle : $55 + 110 + 85 = 250$ €, $110 = 2 \times 55$ et $85 - 55 = 30$. Les parts sont 55 **€,** 110 **€ et** 85 **€**.

Réponse. 55 €, 110 € et 85 €.

Correction de l'exercice 5 – Une histoire d'âges

On note x le nombre d'années à attendre. Dans x ans, la mère aura $42 + x$ ans et sa fille $12 + x$ ans ; on traduit « le double » :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$42 + x = 2(12 + x)$$

On développe : $42 + x = 24 + 2x$. On retranche x puis 24 : $x = 18$. Dans 18 ans, la mère aura 60 ans et sa fille 30 ans.

On peut le retrouver autrement : l'écart d'âge reste toujours de 30 ans, et la mère a le double de l'âge de sa fille quand cet écart est égal à l'âge de la fille, c'est-à-dire quand la fille a 30 ans.

Contrôle : $2 \times 30 = 60$. Ce sera **dans** 18 **ans**.

Réponse. Dans 18 ans : 60 ans et 30 ans.

Correction de l'exercice 6 – Deux marcheurs

Les deux marcheurs vont l'un vers l'autre : ils se croisent quand la somme des distances parcourues égale la distance entre les villages. On note t la durée de marche, en heures.

$$5t + 7t = 24$$

On réduit : $12t = 24$, donc $t = 2$. Au bout de 2 heures, le premier marcheur a parcouru $5 \times 2 = 10$ km et le second $7 \times 2 = 14$ km.

On pouvait aussi raisonner directement : la distance qui les sépare diminue de $5 + 7 = 12$ km chaque heure, il faut donc $\frac{24}{12} = 2$ heures pour l'annuler.

Contrôle : $10 + 14 = 24$ km. Ils se croisent **au bout de** 2 **heures, à** 10 **km du premier village**.

Réponse. Au bout de 2 h, à 10 km du premier village.

Correction de l'exercice 7 – Le prix avant remise

Une remise de 25 % revient à multiplier le prix initial par $1 - 0{,}25 = 0{,}75$. On note p le prix initial, en euros :

$$0{,}75p = 48$$

On divise par 0,75 : $p = \frac{48}{0{,}75} = 64$.

Erreur classique : ajouter 25 % à 48 €, ce qui donne $48 \times 1{,}25 = 60$ €. C'est faux, car les 25 % portent sur le prix **initial**, pas sur le prix remisé : 25 % de 60 vaut 15, et $60 - 15 = 45$, pas 48.

Contrôle : 25 % de 64 vaut 16 €, et $64 - 16 = 48$ €. Le prix initial était 64 **€**.

Réponse. 64 € : $0{,}75 \times 64 = 48$.

Correction de l'exercice 8 – Après une hausse

Une hausse de 8 % revient à multiplier l'ancien prix par $1 + 0{,}08 = 1{,}08$. On note p le prix avant la hausse :

$$1{,}08p = 135$$

On divise par 1,08 : $p = \frac{135}{1{,}08} = 125$.

Erreur classique : retrancher 8 % du nouveau prix, ce qui donne $135 \times 0{,}92 = 124{,}20$ €. C'est faux, car les 8 % ont été calculés sur l'ancien prix. Pour revenir de 135 € à 125 €, il faut d'ailleurs une baisse de $\frac{10}{135} \approx 7{,}4$ %, et non de 8 %.

Contrôle : 8 % de 125 vaut 10 €, et $125 + 10 = 135$ €. L'abonnement coûtait 125 **€** avant la hausse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. 125 € : $1{,}08 \times 125 = 135$.

Correction de l’exercice 9 – Le rectangle d’aire donnée

La largeur vaut $x - 5$, ce qui impose $x > 5$. L’aire vaut $x(x - 5)$, et l’on veut qu’elle égale 84 : $x(x - 5) = 84$.

Ce n’est pas une équation produit, car le second membre n’est pas nul. On ramène tout à zéro : $x^2 - 5x - 84 = 0$. En développant $(x - 12)(x + 7) = x^2 + 7x - 12x - 84 = x^2 - 5x - 84$, on vérifie la factorisation proposée :

$$(x - 12)(x + 7) = 0$$

La règle du produit nul donne $x = 12$ ou $x = -7$. Une longueur est positive et supérieure à 5 : seule $x = 12$ convient. La largeur mesure alors $12 - 5 = 7$ cm.

Contrôle : $12 \times 7 = 84$ cm². Le rectangle mesure 12 **cm sur** 7 **cm**.

Réponse. Longueur 12 cm, largeur 7 cm.

Correction de l’exercice 10 – Les angles du triangle

On exprime les trois angles à partir du premier, noté x (en degrés) : le deuxième mesure $2x$ et le troisième $x + 20$. La somme des angles d’un triangle vaut 180° :

$$x + 2x + (x + 20) = 180$$

On réduit : $4x + 20 = 180$. On retranche 20 : $4x = 160$, donc $x = 40$.

Les angles mesurent 40°, $2 \times 40 = 80°$ et $40 + 20 = 60°$. Les trois sont aigus et distincts : le triangle n’est ni rectangle ni isocèle.

Contrôle : $40 + 80 + 60 = 180$. Les angles mesurent 40°**,** 80° **et** 60°.

Réponse. 40°, 80° et 60°.

Correction de l’exercice 11 – Un programme à rebours

On note x le nombre de départ et l’on traduit le programme étape par étape : $4x$, puis $4x - 7$, puis $3(4x - 7)$. Le résultat vaut 51 :

$$3(4x - 7) = 51$$

On divise par 3 : $4x - 7 = 17$. On ajoute 7 : $4x = 24$, donc $x = 6$.

On peut aussi remonter le programme en appliquant les opérations inverses dans l’ordre inverse : $51 \div 3 = 17$, puis $17 + 7 = 24$, puis $24 \div 4 = 6$. Cette méthode ne marche plus si l’inconnue apparaît deux fois ; l’équation, elle, marche toujours.

Contrôle : $4 \times 6 = 24$, $24 - 7 = 17$ et $17 \times 3 = 51$. Le nombre choisi était 6.

Réponse. 6.

Correction de l’exercice 12 – Pièces de 2 € et billets de 5 €

On note x le nombre de pièces de 2 €. Comme il y a 23 pièces et billets en tout, il y a $23 - x$ billets de 5 €. On traduit la valeur totale :

$$2x + 5(23 - x) = 82$$

On développe : $2x + 115 - 5x = 82$, soit $115 - 3x = 82$. On retranche 115 : $-3x = -33$, et l’on divise par -3 : $x = 11$.

Il y a donc 11 pièces de 2 € et $23 - 11 = 12$ billets de 5 €. Le résultat est vraisemblable : avec 23 pièces de 2 €, on aurait 46 €, et avec 23 billets, 115 € ; 82 € est bien entre les deux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : 11 + 12 = 23, et 22 + 60 = 82 €. Il y a 11 **pièces de** 2 **€**.

Réponse. 11 pièces de 2 € et 12 billets de 5 €.

Correction de l’exercice 13 – Deux forfaits téléphoniques

On note t la durée de communication, en minutes. Le forfait A coûte $12 + 0{,}3t$ euros et le forfait B $20 + 0{,}1t$ euros. On cherche quand ils coûtent le même prix :

$$12 + 0{,}3t = 20 + 0{,}1t$$

On retranche $0{,}1t$ puis 12 : $0{,}2t = 8$, donc $t = \dfrac{8}{0{,}2} = 40$.

Pour 40 minutes, chaque forfait coûte 24 €. En dessous, A est moins cher, car son abonnement est plus bas ; au-delà, B l’emporte, car sa minute coûte trois fois moins.

Contrôle : $12 + 0{,}3 \times 40 = 24$ et $20 + 0{,}1 \times 40 = 24$; à 100 minutes, A coûte 42 € et B 30 €. Les deux forfaits coûtent le même prix pour 40 **minutes**.

Réponse. 40 minutes, pour 24 € dans les deux cas.

Correction de l’exercice 14 – La boîte de base carrée

Le volume d’un pavé droit vaut l’aire de la base multipliée par la hauteur. La base est un carré d’aire x^2 et la hauteur vaut 6 cm :

$$6x^2 = 384$$

On divise par 6 : $x^2 = 64$. Cette équation a deux solutions, 8 et -8, mais une longueur est positive : $x = 8$ cm.

Le pavé a deux bases carrées de $8 \times 8 = 64$ cm² et quatre faces latérales rectangulaires de $8 \times 6 = 48$ cm². L’aire totale vaut donc $2 \times 64 + 4 \times 48 = 128 + 192 = 320$ cm².

Contrôle : $64 \times 6 = 384$ cm³, c’est bien le volume donné. On a $x = 8$ **cm** et une aire totale de 320 **cm²**.

Réponse. $x = 8$ cm ; aire totale 320 cm².

Correction de l’exercice 15 – Les deux citernes

On note d le nombre de jours. La première citerne contient $500 - 12d$ litres, puisqu’elle perd 12 L par jour, et la seconde $200 + 8d$ litres. On cherche quand ces quantités sont égales :

$$500 - 12d = 200 + 8d$$

On ajoute $12d$: $500 = 200 + 20d$. On retranche 200 : $300 = 20d$, donc $d = 15$.

On pouvait aussi raisonner directement : l’écart de 300 L entre les citernes diminue de $12 + 8 = 20$ L chaque jour, il disparaît donc en $\dfrac{300}{20} = 15$ jours.

Contrôle : $500 - 12 \times 15 = 320$ L et $200 + 8 \times 15 = 320$ L. Au bout de 15 **jours**, les deux citernes contiennent 320 **L**.

Réponse. Au bout de 15 jours, à 320 L chacune.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : le potager

a) L’allée s’ajoute des **deux** côtés, dans chaque direction : les dimensions extérieures sont $18 + 2x$ et $12 + 2x$. On développe l’aire totale :

$$(18 + 2x)(12 + 2x) = 4x^2 + 60x + 216$$

Pour $x = 0$, on retrouve 216 m², l’aire du potager seul.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On écrit $4x^2 + 60x + 216 = 352$, soit $4x^2 + 60x - 136 = 0$. On développe la forme proposée : $4(x - 2)(x + 17) = 4(x^2 + 15x - 34) = 4x^2 + 60x - 136$. L'équation devient $4(x - 2)(x + 17) = 0$, d'où $x = 2$ ou $x = -17$. Une largeur est positive : $x = 2$ m. L'ensemble mesure alors 22 m sur 16 m, et $22 \times 16 = 352$ m².

c) L'aire de l'allée est l'aire totale moins celle du potager : $352 - 216 = 136$ m².

d) Le grillage fait le tour de l'ensemble : $2 \times (22 + 16) = 76$ m, qui coûtent $76 \times 9 = 684$ €.

Contrôle de c) : l'allée vaut aussi $4x^2 + 60x = 16 + 120 = 136$ m². Résultats : $x = 2$ m, allée de 136 m², grillage à 684 **€**.

Réponse. a) $4x^2 + 60x + 216$ · b) $x = 2$ m · c) 136 m² · d) 684 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).