# Plaquette 1 – Résoudre et mettre en équation

## Équations et inéquations — Troisième

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Méthodes du cours.**

- Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent l'égalité vraie.
- On peut **ajouter ou soustraire** le même nombre aux deux membres, **multiplier ou diviser** les deux membres par un même nombre **non nul**.
- **Équation produit** : $A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ **ou** $B = 0$.
- Équation $x^2 = a$ : si $a > 0$, deux solutions $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$ ; si $a = 0$, une seule ( $x = 0$) ; si $a < 0$, aucune.
- **Inéquation** : on procède comme pour une équation, mais multiplier ou diviser par un nombre **négatif change le sens** de l'inégalité.
- Les solutions d'une inéquation se donnent sous forme d'inégalité (par exemple $x > 3$), et se représentent sur une droite graduée.
- Mise en équation : on choisit l'inconnue (« soit $x$ le nombre de … »), on traduit chaque information, on résout, on vérifie que la réponse a un sens.

**Exemple.** Pour une équation produit, chaque facteur donne une solution :

$$(x - 2)(3x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$$

## Correction de l'exercice 1 – Équations du premier degré

Pour isoler $x$, on regroupe les termes en $x$ dans un membre et les nombres dans l'autre, puis on divise par le coefficient de $x$.

a) On retranche 3 : $5x = 20$. On divise par 5 : $x = 4$.

b) On retranche $3x$ pour regrouper les $x$ à gauche : $4x - 4 = 12$. On ajoute 4 : $4x = 16$, donc $x = 4$.

c) On développe d'abord : $2x - 6 = 5x + 6$. On retranche $2x$, le plus petit coefficient, puis 6 :

$$-12 = 3x \quad \text{donc} \quad x = -4$$

**Contrôle** : en b), $7 \times 4 - 4 = 24$ et $3 \times 4 + 12 = 24$ ; en c), $2(-4 - 3) = -14$ et $5 \times (-4) + 6 = -14$. Les solutions sont 4, 4 et $-4$.

**Réponse.** a) $x = 4$ · b) $x = 4$ · c) $x = -4$.

## Correction de l'exercice 2 – Équation avec des fractions

Les dénominateurs 4 et 3 sont non nuls : on peut appliquer l'égalité des produits en croix, ce qui supprime les fractions.

$$\frac{3x - 1}{4} = \frac{x + 5}{3} \Leftrightarrow 3(3x - 1) = 4(x + 5)$$

On développe : $9x - 3 = 4x + 20$. On retranche $4x$ puis on ajoute 3 : $5x = 23$, donc $x = \frac{23}{5} = 4{,}6$.

**Contrôle** : $\frac{3 \times 4{,}6 - 1}{4} = \frac{12{,}8}{4} = 3{,}2$ et $\frac{4{,}6 + 5}{3} = \frac{9{,}6}{3} = 3{,}2$. La solution est $x = 4{,}6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $x = \dfrac{23}{5} = 4{,}6$.

## Correction de l'exercice 3 – Équation produit

Le membre de gauche est un produit et le second membre vaut 0 : on applique la propriété du produit nul. Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

— $2x - 8 = 0$ donne $2x = 8$, donc $x = 4$.
— $3x + 9 = 0$ donne $3x = -9$, donc $x = -3$.

$$(2x - 8)(3x + 9) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -3$$

**Contrôle** avec $x = -3$ : $(2 \times (-3) - 8) \times (3 \times (-3) + 9) = (-14) \times 0 = 0$. L'équation a deux solutions, 4 et $-3$.

**Réponse.** $x = 4$ ou $x = -3$.

## Correction de l'exercice 4 – Factoriser pour résoudre

Aucune des deux équations n'est un produit nul au départ : on factorise d'abord le membre de gauche, puis on applique la propriété du produit nul.

— $x^2 - 5x$ : les deux termes contiennent $x$, donc $x^2 - 5x = x(x - 5)$. On obtient $x = 0$ ou $x - 5 = 0$, soit $x = 5$.
— $x^2 - 49$ : on reconnaît une différence de carrés, car $49 = 7^2$ :

$$x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7) = 0$$

d'où $x = 7$ ou $x = -7$. On pouvait aussi écrire $x^2 = 49$.

**Piège** : dans la première équation, il ne faut pas diviser par $x$, car $x$ peut valoir 0 ; on perdrait cette solution. Les solutions sont 0 et 5, puis $-7$ et 7.

**Réponse.** $\{0\,;5\}$ puis $\{-7\,;7\}$.

## Correction de l'exercice 5 – Équations du type x² = a

Pour une équation $x^2 = a$, tout dépend du signe de $a$ : un carré est toujours positif ou nul.

a) $36 > 0$ : il y a deux nombres dont le carré vaut 36, à savoir 6 et $-6$.

b) $5 > 0$ : deux solutions, que l'on écrit en valeur exacte avec la racine carrée :

$$x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}$$

soit environ 2,24 et $-2{,}24$.

c) $-4 < 0$ : aucun carré ne peut être négatif, l'équation n'a **aucune** solution.

**À retenir** : $\sqrt{36} = 6$ seulement, car la racine carrée est positive ; c'est l'équation $x^2 = 36$ qui a deux solutions. **Contrôle** : $(-\sqrt{5})^2 = 5$.

**Réponse.** a) $\{-6\,;6\}$ · b) $\{-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}\}$ · c) aucune solution.

## Correction de l'exercice 6 – Inéquations

On résout une inéquation comme une équation, en surveillant une seule chose : multiplier ou diviser par un nombre **négatif** change le sens de l'inégalité.

a) On retranche 5 : $3x \leq 12$. On divise par 3, positif, le sens est conservé : $x \leq 4$. Sur la droite graduée, on colore la partie à gauche de 4, avec un crochet fermé en 4.

b) On retranche 1 : $-2x > 8$. On divise par $-2$, négatif, donc le sens change :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$x < \frac{8}{-2} = -4$$

Sur la droite, on colore la partie à gauche de $-4$, avec un crochet **ouvert** en $-4$, car $-4$ n'est pas solution.

**Contrôle** de b) : $x = -5$ donne $11 > 9$, vrai, et $x = 0$ donne $1 > 9$, faux. Les solutions sont $x \leq 4$ et $x < -4$.

**Réponse.** a) $x \leq 4$ · b) $x < -4$.

## Correction de l'exercice 7 – Inéquation avec parenthèses

On développe les deux membres pour se ramener à une inéquation sans parenthèses :

$$4x - 8 < 6x + 2$$

On retranche $4x$, le plus petit coefficient, pour garder un coefficient de $x$ positif : $-8 < 2x + 2$. On retranche $2$ : $-10 < 2x$. On divise par $2$, positif, le sens est conservé : $-5 < x$.

Cette inégalité se lit « $x$ est strictement supérieur à $-5$ » : les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs à $-5$.

**Contrôle** : $x = 0$ donne $-8 < 2$, vrai ; $x = -6$ donne $4 \times (-8) = -32$ et $2 \times (-17) = -34$, or $-32 < -34$ est faux. Les solutions sont les nombres $x > -5$.

**Réponse.** $x > -5$.

## Correction de l'exercice 8 – Problème : un âge

On note $x$ l'âge de Léa aujourd'hui, en années. Dans 6 ans, elle aura $x + 6$ ans ; il y a 4 ans, elle avait $x - 4$ ans. On traduit « le double » :

$$x + 6 = 2(x - 4)$$

On développe : $x + 6 = 2x - 8$. On retranche $x$ : $6 = x - 8$, puis on ajoute $8$ : $x = 14$.

**Contrôle** : dans 6 ans, Léa aura 20 ans ; il y a 4 ans, elle avait 10 ans ; et $20 = 2 \times 10$. Léa a 14 **ans** aujourd'hui.

**Réponse.** 14 ans.

## Correction de l'exercice 9 – Problème : deux tarifs

On note $x$ le nombre de séances. La formule A coûte $4x + 60$ euros et la formule B coûte $10x$ euros.

a) Les deux formules coûtent le même prix quand

$$4x + 60 = 10x$$

On retranche $4x$ : $60 = 6x$, donc $x = 10$. Pour 10 séances, chaque formule coûte 100 €.

b) A est plus avantageuse quand elle coûte moins : $4x + 60 < 10x$, soit $60 < 6x$, donc $x > 10$. Le nombre de séances est entier : il faut au moins 11 séances.

**Contrôle** avec 12 séances : A coûte 108 € et B coûte 120 €. Les formules sont au même prix pour 10 **séances**, et A devient plus avantageuse **à partir de** 11 **séances**.

**Réponse.** a) 10 séances (100 €) · b) à partir de 11 séances.

## Correction de l'exercice 10 – Problème : périmètre et dimensions

On note $x$ la largeur en centimètres ; la longueur vaut alors $3x$. Le périmètre d'un rectangle vaut deux fois la somme de la longueur et de la largeur :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$2(x + 3x) = 56$$

On réduit : $2 \times 4x = 8x$, donc $8x = 56$ et $x = 7$. La largeur mesure 7 cm et la longueur $3 \times 7 = 21$ cm.

L'aire vaut alors $7 \times 21 = 147$ cm².

**Contrôle** : $2 \times (7 + 21) = 2 \times 28 = 56$ cm, c'est bien le périmètre donné. Le rectangle mesure 7 **cm sur** 21 **cm** et son aire vaut 147 **cm²**.

**Réponse.** Largeur 7 cm, longueur 21 cm, aire 147 cm².

## Correction de l'exercice 11 – Tester des valeurs

Un nombre est solution si, en le substituant à $x$, on obtient une égalité vraie.

a) Pour $-2$ : $(-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$, donc $-2$ est solution. Pour 0 : $0 - 0 - 6 = -6 \neq 0$, donc 0 ne l'est pas. Pour 3 : $9 - 3 - 6 = 0$, donc 3 est solution.

b) On développe : $(x + 2)(x - 3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$. L'équation s'écrit donc comme un produit nul :

$$(x + 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 3$$

Tester des valeurs montre qu'un nombre est solution, mais pas qu'il n'y en a pas d'autres : c'est la factorisation qui prouve qu'il y en a **exactement deux**, $-2$ et 3.

**Réponse.** a) $-2$ et 3 · b) les solutions sont exactement $-2$ et 3.

## Correction de l'exercice 12 – Programme de calcul

a) On suit les étapes : $5 + 3 = 8$, puis $8 \times 2 = 16$, puis $16 - 5 = 11$.

b) On note $x$ le nombre choisi et l'on traduit chaque étape : $x + 3$, puis $2(x + 3)$, puis $2(x + 3) - x$. On développe et on réduit avant de poser l'équation :

$$2(x + 3) - x = 2x + 6 - x = x + 6$$

Le programme revient donc à ajouter 6 au nombre choisi. Pour obtenir 15, on résout $x + 6 = 15$, d'où $x = 9$.

**Contrôle** : $9 + 3 = 12$, $12 \times 2 = 24$ et $24 - 9 = 15$. Il faut choisir 9.

**Réponse.** a) 11 · b) 9.

## Correction de l'exercice 13 – Un nombre égal à son carré

On note $x$ un tel nombre : il vérifie $x^2 = x$. Ce n'est pas une équation produit, car le second membre n'est pas nul ; on ramène tout dans un membre et l'on factorise par $x$ :

$$x^2 - x = x(x - 1) = 0$$

La propriété du produit nul donne $x = 0$ ou $x - 1 = 0$, soit $x = 1$.

**Piège** : diviser les deux membres de $x^2 = x$ par $x$ donnerait seulement $x = 1$. On n'a le droit de diviser que par un nombre non nul, et $x$ peut justement valoir 0.

**Contrôle** : $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$ ; en revanche $2^2 = 4 \neq 2$. Les nombres égaux à leur carré sont 0 **et** 1.

**Réponse.** 0 et 1.

## Correction de l'exercice 14 – Des équations particulières

Dans ces deux équations, le terme en $x$ disparaît quand on regroupe : c'est l'égalité qui reste qui donne la conclusion.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) On développe : $3x + 6 = 3x + 6$. Les deux membres sont la même expression ; en retranchant $3x$, il reste $6 = 6$, toujours vrai. **Tout** nombre est solution.

b) On développe : $4x - 1 = 4x + 4$. En retranchant $4x$, il reste

$$-1 = 4$$

ce qui est faux quelle que soit la valeur de $x$ : l'équation n'a **aucune** solution. Le membre de droite dépasse toujours celui de gauche de 5.

**Contrôle** avec $x = 2$ : en a), $3 \times 4 = 12$ et $6 + 6 = 12$ ; en b), 7 et 12. Conclusion : a) admet tous les nombres comme solutions, b) n'en a aucune.

**Réponse.** a) tout nombre est solution · b) aucune solution.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : quatre résolutions

On reconnaît d'abord la forme de chaque équation, car c'est elle qui donne la méthode.

a) Premier degré : on ajoute $2x$ puis 9, d'où $15 = 5x$ et $x = 3$.

b) Produit nul : $x + 5 = 0$ ou $x - 1 = 0$, donc $x = -5$ ou $x = 1$.

c) On retranche 3 pour se ramener à $x^2 = 9$ : comme $9 > 0$, $x = 3$ ou $x = -3$.

d) Inéquation : on retranche 7, puis on divise par $-3$, négatif, ce qui change le sens :

$$-3x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 2$$

**Contrôle** de d) : $x = 0$ donne $7 \geq 1$, vrai, et $x = 3$ donne $-2 \geq 1$, faux. Solutions : 3 ; $-5$ et 1 ; $-3$ et 3 ; $x \leq 2$.

**Réponse.** a) $x = 3$ · b) $\{-5\,;\,1\}$ · c) $\{-3\,;\,3\}$ · d) $x \leq 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).