Plaquette 1 – Coefficients, représentations et pourcentages

Fonctions linéaires et affines — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et formules du cours.

— Fonction **linéaire** : $f(x) = ax$. Sa représentation est une **droite passant par l'origine** ; a est le coefficient de proportionnalité.

— Fonction **affine** : $f(x) = ax + b$. Sa représentation est une droite ; a est le **coefficient directeur**, b l'**ordonnée à l'origine** (image de 0).

— Une fonction linéaire est une fonction affine particulière (celle où $b = 0$).

— Coefficient directeur à partir de deux points :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

— Sens de variation : $a > 0$ croissante, $a < 0$ décroissante, $a = 0$ constante.

— **Pourcentages** : augmenter de t % correspond à la fonction linéaire de coefficient $1 + \frac{t}{100}$; diminuer de t %, au coefficient $1 - \frac{t}{100}$.

— Prendre t % d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.

Correction de l'exercice 1 – Linéaire ou affine ?

On essaie d'écrire chaque expression sous la forme $ax + b$. Si c'est possible avec $b = 0$, la fonction est linéaire ; avec $b \neq 0$, elle est affine non linéaire ; si c'est impossible, elle n'est ni l'une ni l'autre.

a) $f(x) = 5x$ est de la forme ax, avec $a = 5$: **linéaire**.

b) $g(x) = 2x - 7$ est de la forme $ax + b$, avec $a = 2$ et $b = -7 \neq 0$: **affine non linéaire**.

c) $h(x) = x^2 + 1$ contient le carré de x : elle n'est **ni linéaire ni affine**.

d) Diviser par 4 revient à multiplier par 0,25 :

$$k(x) = \frac{x}{4} = 0{,}25x$$

donc k est **linéaire**, de coefficient 0,25. Bilan : linéaire, affine, ni l'une ni l'autre, linéaire.

Réponse. a) linéaire · b) affine · c) ni l'une ni l'autre · d) linéaire.

Correction de l'exercice 2 – Déterminer une fonction linéaire

Une fonction linéaire s'écrit $f(x) = ax$: il suffit d'une seule valeur pour trouver a. L'égalité $f(4) = 10$ s'écrit $4a = 10$, donc

$$a = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

La fonction est $f(x) = 2{,}5x$, et $f(7) = 2{,}5 \times 7 = 17{,}5$.

Contrôle par la proportionnalité : $7 = 4 \times 1{,}75$, donc $f(7) = 10 \times 1{,}75 = 17{,}5$. On trouve $f(x) = 2{,}5x$ et $f(7) = 17{,}5$.

Réponse. $f(x) = 2{,}5x$ et $f(7) = 17{,}5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Déterminer une fonction affine

Une fonction affine s’écrit $g(x) = ax + b$. Le coefficient a est l’augmentation de l’image divisée par l’augmentation de x : quand x passe de 1 à 4, l’image passe de 5 à 17.

$$a = \frac{g(4) - g(1)}{4 - 1} = \frac{17 - 5}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Donc $g(x) = 4x + b$. On utilise $g(1) = 5$: $4 \times 1 + b = 5$, d’où $b = 1$.

Contrôle : $g(4) = 16 + 1 = 17$. La fonction est $g(x) = 4x + 1$.

Réponse. $g(x) = 4x + 1$.

Correction de l’exercice 4 – Représentation graphique

a) La droite coupe l’axe des ordonnées au point d’abscisse 0 : son ordonnée est $f(0) = b = 3$. C’est le point $(0\,;3)$.

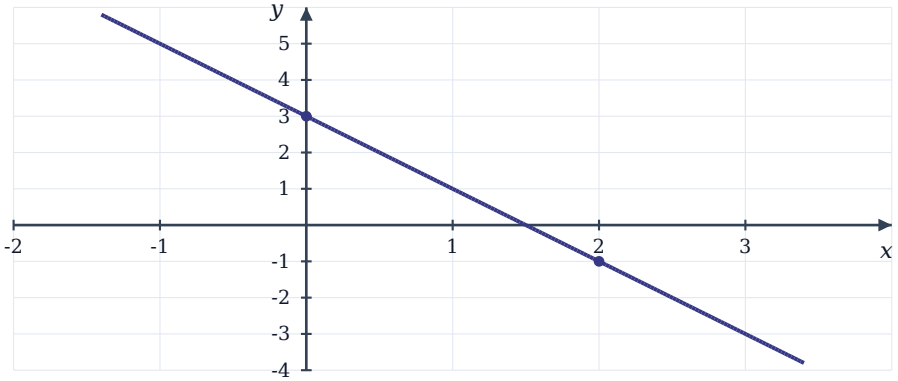
b) $f(0) = 3$ et $f(2) = -2 \times 2 + 3 = -1$. Une droite est déterminée par deux de ses points : on la trace en reliant $(0\,;3)$ et $(2\,;-1)$.

$$f(2) = -4 + 3 = -1$$

c) Le coefficient $a = -2$ est négatif : quand x augmente de 1, $f(x)$ diminue de 2. La fonction est **décroissante**, et la droite « descend » de gauche à droite.

Réponses : $(0\,;3)$; les points $(0\,;3)$ et $(2\,;-1)$; décroissante.

Réponse. a) $(0\,;3)$ · b) $(0\,;3)$ et $(2\,;-1)$ · c) décroissante.



Droite d'équation y = −2x + 3, tracée avec (0 ; 3) et (2 ; −1)

Correction de l’exercice 5 – Lire un coefficient sur un graphique

Le coefficient directeur se calcule avec deux points de la droite : on divise la variation des ordonnées par celle des abscisses. Entre $(-2\,;7)$ et $(3\,;-3)$:

$$a = \frac{-3 - 7}{3 - (-2)} = \frac{-10}{5} = -2$$

La fonction s’écrit donc $f(x) = -2x + b$. Le point $(3\,;-3)$ est sur la droite : $-2 \times 3 + b = -3$, soit $-6 + b = -3$, d’où $b = 3$. Sur le graphique, on lit d’ailleurs que la droite coupe l’axe des ordonnées en 3.

Contrôle avec l’autre point : $-2 \times (-2) + 3 = 4 + 3 = 7$. La fonction est $f(x) = -2x + 3$.

Réponse. $f(x) = -2x + 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Résoudre avec une fonction affine

a) On résout $3x - 12 = 0$: $3x = 12$, donc $x = 4$. La droite coupe l’axe des abscisses au point $(4\,;0)$.

b) On résout $3x - 12 = 9$: $3x = 21$, donc $x = 7$.

c) On résout l’inéquation $3x - 12 > 0$. On ajoute 12, puis on divise par 3, positif, ce qui conserve le sens :

$$3x > 12 \Leftrightarrow x > 4$$

Lecture : la fonction est croissante, car $a = 3 > 0$, et s’annule en 4 ; elle est donc négative avant 4 et positive après.

Contrôle : $f(7) = 21 - 12 = 9$. Réponses : $x = 4$; $x = 7$; $x > 4$.

Réponse. a) $x = 4$ · b) $x = 7$ · c) $x > 4$.

Correction de l’exercice 7 – Pourcentage d’augmentation

a) Augmenter de 15 %, c’est ajouter $\frac{15}{100}$ du prix au prix lui-même, donc multiplier par

$$1 + \frac{15}{100} = 1{,}15$$

La fonction est $f(x) = 1{,}15x$, linéaire de coefficient 1,15.

b) $f(80) = 1{,}15 \times 80 = 92$ €.

c) La seconde hausse s’applique au nouveau prix, 92 € : $1{,}15 \times 92 = 105{,}80$ €. Cela revient à multiplier 80 € par $1{,}15 \times 1{,}15 = 1{,}3225$, soit une hausse globale de 32,25 %.

Piège classique : deux hausses de 15 % ne font pas une hausse de 30 %. Les pourcentages ne s’additionnent pas, les coefficients se multiplient. Réponses : $f(x) = 1{,}15x$; 92 **€** ; 105,80 **€**.

Réponse. a) $f(x) = 1{,}15x$ · b) 92 € · c) 105,80 € (hausse globale de 32,25 %).

Correction de l’exercice 8 – Pourcentage de réduction

a) Diminuer de 30 %, c’est garder 70 % du prix, donc multiplier par $1 - 0{,}30 = 0{,}7$: $f(x) = 0{,}7x$.

b) $f(450) = 0{,}7 \times 450 = 315$ €.

c) On cherche le coefficient k qui ramène 315 € à 450 € : $315k = 450$, d’où

$$k = \frac{450}{315} \approx 1{,}4286$$

Ce coefficient correspond à une hausse d’environ 42,9 %.

Ce n’est **pas** 30 % : la hausse porte sur le prix soldé, plus petit que le prix de départ. Une hausse de 30 % ne ramènerait qu’à $315 \times 1{,}3 = 409{,}50$ €.

Réponses : $f(x) = 0{,}7x$; 315 **€** ; environ +42,9 %.

Réponse. a) $f(x) = 0{,}7x$ · b) 315 € · c) environ +42,9 %.

Correction de l’exercice 9 – Comparer deux abonnements

a) La salle A coûte 25 € par mois : $a(x) = 25x$, fonction **linéaire**. La salle B ajoute une inscription de 90 € à 16 € par mois : $b(x) = 16x + 90$, fonction **affine**.

b) Les coûts sont égaux quand

$$25x = 16x + 90 \Leftrightarrow 9x = 90 \Leftrightarrow x = 10$$

Au bout de 10 mois, chaque salle a coûté 250 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Pour un an, $x = 12$: la salle A coûte $25 \times 12 = 300$ € et la salle B $16 \times 12 + 90 = 282$ €. La salle B est moins chère, et le reste au-delà de 10 mois, car son coût augmente moins vite chaque mois.

Réponses : $25x$ et $16x + 90$; 10 **mois** ; la **salle B**.

Réponse. a) $25x$ et $16x + 90$ · b) 10 mois (250 €) · c) la salle B (282 € contre 300 €).

Correction de l'exercice 10 – Problème : conversion de devises

a) Le nombre de dollars est proportionnel au nombre d'euros, avec le coefficient 1,08 : $f(x) = 1{,}08x$, fonction **linéaire**.

b) $f(250) = 1{,}08 \times 250 = 270$ dollars.

c) On cherche l'antécédent de 540 : on résout $1{,}08x = 540$.

$$x = \frac{540}{1{,}08} = 500$$

La conversion inverse, des dollars vers les euros, est aussi linéaire, de coefficient $\frac{1}{1{,}08} \approx 0{,}926$.

Contrôle : $1{,}08 \times 500 = 540$. Réponses : $f(x) = 1{,}08x$; 270 **dollars** ; 500 **€**.

Réponse. a) $f(x) = 1{,}08x$ · b) 270 dollars · c) 500 €.

Correction de l'exercice 11 – Lire deux droites

a) La droite de f passe par l'origine du repère : f est **linéaire**. Celle de g coupe l'axe des ordonnées en 4, pas en 0 : g est affine non linéaire.

b) À la verticale de $x = 2$, on lit $f(2) = 3$ et $g(2) = 2$.

c) f est linéaire, $f(x) = ax$, et $f(2) = 3$ donne $a = 1{,}5$: $f(x) = 1{,}5x$. Pour g, l'ordonnée à l'origine vaut 4 ; la droite passe aussi par $(4\,;0)$, donc son coefficient vaut $\frac{0-4}{4-0} = -1$: $g(x) = -x + 4$.

d) Au point d'intersection, les deux images sont égales :

$$1{,}5x = -x + 4 \Leftrightarrow 2{,}5x = 4 \Leftrightarrow x = 1{,}6$$

et $f(1{,}6) = 2{,}4$. Le graphique ne permettait qu'une lecture approchée ; le calcul donne la valeur exacte.

Contrôle : $g(1{,}6) = -1{,}6 + 4 = 2{,}4$. Le point d'intersection est $(1{,}6\,;2{,}4)$.

Réponse. a) f · b) $f(2) = 3$, $g(2) = 2$ · c) $f(x) = 1{,}5x$ et $g(x) = -x + 4$ · d) $(1{,}6\,;2{,}4)$.

Correction de l'exercice 12 – Proportionnel ou affine ?

Une fonction linéaire correspond à un tableau de proportionnalité : le quotient $\frac{f(x)}{x}$ est le même dans chaque colonne.

— Pour f : $\frac{7}{2} = 3{,}5$, $\frac{17{,}5}{5} = 3{,}5$ et $\frac{28}{8} = 3{,}5$. Le tableau est proportionnel, de coefficient 3,5 : $f(x) = 3{,}5x$ convient.

— Pour g : $\frac{7}{2} = 3{,}5$ mais $\frac{16}{5} = 3{,}2$. Le tableau n'est pas proportionnel, g n'est pas linéaire. En revanche, quand x augmente de 3, $g(x)$ augmente toujours de 9 : c'est le comportement d'une fonction affine de coefficient

$$a = \frac{16-7}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$$

Avec $g(2) = 7$: $3 \times 2 + b = 7$, d'où $b = 1$, et $g(x) = 3x + 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $3 \times 8 + 1 = 25$. Réponses : $f(x) = 3{,}5x$, linéaire ; $g(x) = 3x + 1$, affine non linéaire.

Réponse. $f(x) = 3{,}5x$ (linéaire) ; $g(x) = 3x + 1$ (affine, non linéaire).

Correction de l'exercice 13 – Calculer un taux d'évolution

Le coefficient multiplicateur est le nombre par lequel on multiplie la valeur de départ pour obtenir la valeur d'arrivée : c'est leur quotient, arrivée divisée par départ.

a) $\frac{46}{40} = 1{,}15$. Un coefficient de $1{,}15 = 1 + 0{,}15$ correspond à une **hausse de** 15 %.

b) Le coefficient vaut

$$\frac{210}{250} = 0{,}84$$

Un coefficient de $0{,}84 = 1 - 0{,}16$ correspond à une **baisse de** 16 %.

Un coefficient supérieur à 1 traduit une hausse, un coefficient inférieur à 1 une baisse.

Contrôle : $40 \times 1{,}15 = 46$ et $250 \times 0{,}84 = 210$. Réponses : 1,15, soit +15 % ; 0,84, soit −16 %.

Réponse. a) 1,15, hausse de 15 % · b) 0,84, baisse de 16 %.

Correction de l'exercice 14 – Problème : la bougie

a) La hauteur part de 24 cm et perd 1,5 cm chaque heure : $h(t) = 24 - 1{,}5t$. C'est une fonction **affine**, de coefficient $-1{,}5$, donc décroissante : la bougie raccourcit.

b) $h(4) = 24 - 6 = 18$ cm.

c) On cherche l'antécédent de 6 :

$$24 - 1{,}5t = 6 \Leftrightarrow -1{,}5t = -18 \Leftrightarrow t = 12$$

On divise par $-1{,}5$: le quotient de deux nombres négatifs est positif.

d) La bougie est entièrement consumée quand $h(t) = 0$: $1{,}5t = 24$, soit $t = 16$ h. Le modèle n'a donc de sens que pour t compris entre 0 et 16.

Contrôle : $h(12) = 24 - 18 = 6$ cm. Réponses : $h(t) = 24 - 1{,}5t$; 18 cm ; 12 **h** ; 16 **h**.

Réponse. a) $h(t) = 24 - 1{,}5t$, affine décroissante · b) 18 cm · c) 12 h · d) 16 h.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : lecture et calculs

a) Le coefficient est la variation des images divisée par celle des abscisses, de $x = -1$ à $x = 3$:

$$a = \frac{-2 - 6}{3 - (-1)} = \frac{-8}{4} = -2$$

Avec $f(3) = -2$: $-2 \times 3 + b = -2$, d'où $b = 4$ et $f(x) = -2x + 4$.

b) $f(0) = 4$, l'ordonnée à l'origine, et $f(5) = -10 + 4 = -6$.

c) $-2x + 4 = 0$ donne $x = 2$. Comme $a = -2 < 0$, la fonction est décroissante : elle est positive avant 2 et négative après, soit $f(x) > 0$ pour $x < 2$ et $f(x) < 0$ pour $x > 2$.

Contrôle : $f(-1) = 2 + 4 = 6$. Réponses : $f(x) = -2x + 4$; 4 et −6 ; $x = 2$, positive puis négative.

Réponse. a) $f(x) = -2x + 4$ · b) 4 et −6 · c) $x = 2$, $f > 0$ avant, $f < 0$ après.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).