

Plaquette 1 - Coefficients, représentations et pourcentages

Fonctions linéaires et affines — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et formules du cours.

- Fonction **linéaire** : $f(x) = ax$. Sa représentation est une **droite passant par l'origine** ; a est le coefficient de proportionnalité.
- Fonction **affine** : $f(x) = ax + b$. Sa représentation est une droite ; a est le **coefficient directeur**, b l'**ordonnée à l'origine** (image de 0).
- Une fonction linéaire est une fonction affine particulière (celle où $b = 0$).
- Coefficient directeur à partir de deux points :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Sens de variation : $a > 0$ croissante, $a < 0$ décroissante, $a = 0$ constante.
- **Pourcentages** : augmenter de $t\%$ correspond à la fonction linéaire de coefficient $1 + \frac{t}{100}$; diminuer de $t\%$, au coefficient $1 - \frac{t}{100}$.
- Prendre $t\%$ d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.

Correction de l'exercice 1 - Linéaire ou affine ?

On compare à la forme $ax + b$.

- a) $f(x) = 5x$ est de la forme ax : **linéaire** (avec $a = 5$).
- b) $g(x) = 2x - 7$ est de la forme $ax + b$ avec $b = -7 \neq 0$: **affine non linéaire**.
- c) $h(x) = x^2 + 1$ contient un carré : ni linéaire, ni affine.
- d) $k(x) = \frac{x}{4} = 0,25x$: **linéaire** (avec $a = 0,25$).

Réponse. a) linéaire · b) affine · c) ni l'une ni l'autre · d) linéaire.

Correction de l'exercice 2 - Déterminer une fonction linéaire

Une fonction linéaire s'écrit $f(x) = ax$.

- $f(4) = 4a = 10$, donc $a = \frac{10}{4} = 2,5$.
- Ainsi $f(x) = 2,5x$.
- $f(7) = 2,5 \times 7 = 17,5$.
- Contrôle par la proportionnalité : $7 = 4 \times 1,75$, et $10 \times 1,75 = 17,5$. Même résultat.

Réponse. $f(x) = 2,5x$ et $f(7) = 17,5$.

Correction de l'exercice 3 - Déterminer une fonction affine

On calcule d'abord le coefficient directeur avec la formule du cours :

$$a = \frac{g(4) - g(1)}{4 - 1} = \frac{17 - 5}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

- g est donc de la forme $g(x) = 4x + b$.
- On utilise $g(1) = 5$: $4 \times 1 + b = 5$, donc $b = 1$.

- Conclusion : $g(x) = 4x + 1$.
- Vérification : $g(4) = 16 + 1 = 17$. Correct.

Réponse. $g(x) = 4x + 1$.

Correction de l'exercice 4 - Représentation graphique

- a) L'ordonnée à l'origine est $b = 3$: la droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0; 3)$.
- b) $f(0) = 3$ et $f(2) = -4 + 3 = -1$. Deux points suffisent pour tracer une droite : $(0; 3)$ et $(2; -1)$.
- c) Le coefficient directeur est $a = -2 < 0$: la fonction est **décroissante**. Quand x augmente de 1, $f(x)$ diminue de 2.

Réponse. a) $(0; 3)$ · b) $(0; 3)$ et $(2; -1)$ · c) décroissante.

Correction de l'exercice 5 - Lire un coefficient sur un graphique

- Coefficient directeur :

$$a = \frac{-3 - 7}{3 - (-2)} = \frac{-10}{5} = -2$$

- La fonction est de la forme $f(x) = -2x + b$.
- On utilise le point $(3; -3)$: $-2 \times 3 + b = -3$, donc $-6 + b = -3$ et $b = 3$.
- Conclusion : $f(x) = -2x + 3$.
- Vérification avec l'autre point : $-2 \times (-2) + 3 = 4 + 3 = 7$. Correct.

Réponse. $f(x) = -2x + 3$.

Correction de l'exercice 6 - Résoudre avec une fonction affine

- a) $3x - 12 = 0$ donne $3x = 12$, donc $x = 4$. La droite coupe l'axe des abscisses en $(4; 0)$.
- b) $3x - 12 = 9$ donne $3x = 21$, donc $x = 7$.
- c) $3x - 12 > 0$ donne $3x > 12$, donc $x > 4$ (le coefficient 3 est positif, le sens ne change pas).
- Lecture : la fonction est croissante et s'annule en 4 ; elle est donc négative avant 4 et positive après.

Réponse. a) $x = 4$ · b) $x = 7$ · c) $x > 4$.

Correction de l'exercice 7 - Pourcentage d'augmentation

- a) Augmenter de 15 % revient à multiplier par

$$1 + \frac{15}{100} = 1,15$$

- La fonction est $f(x) = 1,15x$, linéaire de coefficient 1,15.
- b) $f(80) = 1,15 \times 80 = 92$ €.
- c) Deux augmentations successives : on applique deux fois le coefficient.
- $f(f(80)) = 1,15 \times 92 = 105,8$ €.
- Autrement dit, le coefficient global est $1,15^2 = 1,3225$, soit une hausse de 32,25 % — et **non** de 30 %.

Piège classique. Deux hausses de 15 % ne font pas une hausse de 30 % : les pourcentages ne s'additionnent pas, les coefficients se multiplient.

Réponse. a) $f(x) = 1,15x$ · b) 92 € · c) 105,80 € (hausse globale de 32,25 %).

Correction de l'exercice 8 - Pourcentage de réduction

- a) Diminuer de 30 % revient à multiplier par $1 - 0,30 = 0,7$, donc $f(x) = 0,7x$.
- b) $f(450) = 0,7 \times 450 = 315$ €.
- c) On cherche le coefficient k tel que $315k = 450$:
- $k = \frac{450}{315} \approx 1,4286$.
 - Cela correspond à une augmentation d'environ 42,9 %.
 - **Ce n'est pas** 30 % : une baisse de 30 % suivie d'une hausse de 30 % donnerait $0,7 \times 1,3 = 0,91$, soit une perte de 9 %.

Réponse. a) $f(x) = 0,7x$ · b) 315 € · c) environ +42,9 %.

Correction de l'exercice 9 - Comparer deux abonnements

- a) Salle A : $a(x) = 25x$ (fonction **linéaire**).
- Salle B : $b(x) = 16x + 90$ (fonction **affine**).
- b) On résout $25x = 16x + 90$.
- $9x = 90$, donc $x = 10$ mois, pour un coût de 250 € dans les deux cas.
- c) Pour $x = 12$:
- Salle A : $25 \times 12 = 300$ €.
 - Salle B : $16 \times 12 + 90 = 192 + 90 = 282$ €.
 - La salle B est moins chère sur un an (et le reste au-delà de 10 mois, car son coût augmente moins vite).

Réponse. a) $25x$ et $16x + 90$ · b) 10 mois (250 €) · c) la salle B (282 € contre 300 €).

Correction de l'exercice 10 - Problème : conversion de devises

- a) La conversion est une situation de proportionnalité : $f(x) = 1,08x$, fonction **linéaire**.
- b) $f(250) = 1,08 \times 250 = 270$ dollars.
- c) On cherche l'antécédent de 540 : on résout $1,08x = 540$.
- $x = \frac{540}{1,08} = 500$ €.
 - Vérification : $1,08 \times 500 = 540$. Correct.
 - Remarque : la conversion inverse est aussi une fonction linéaire, de coefficient $\frac{1}{1,08} \approx 0,926$.

Réponse. a) $f(x) = 1,08x$ · b) 270 dollars · c) 500 €.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : lecture et calculs

- a) Coefficient directeur :

$$a = \frac{-2 - 6}{3 - (-1)} = \frac{-8}{4} = -2$$

- Avec $f(3) = -2$: $-2 \times 3 + b = -2$, donc $-6 + b = -2$ et $b = 4$.
 - Ainsi $f(x) = -2x + 4$.
- b) $f(0) = 4$ (c'est l'ordonnée à l'origine) et $f(5) = -10 + 4 = -6$.
- c) $-2x + 4 = 0$ donne $-2x = -4$, donc $x = 2$.

- Comme $a = -2 < 0$, la fonction est décroissante : elle est **positive** avant 2 et **négative** après.
- Autrement dit : $f(x) > 0$ pour $x < 2$ et $f(x) < 0$ pour $x > 2$.

Réponse. a) $f(x) = -2x + 4$ · b) 4 et -6 · c) $x = 2$, $f > 0$ avant, $f < 0$ après.