Plaquette 5 – Comparer deux offres et modéliser

Fonctions linéaires et affines — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Reconnaître la structure d'un tarif.

Formulation de l'énoncé	Fonction
« p € par unité »	linéaire, $f(x) = px$
« b € d'abonnement puis p € par unité »	affine, $f(x) = px + b$
« forfait de b € tout compris »	constante, $f(x) = b$

La démarche de comparaison.

— Écrire les deux fonctions avec **la même variable**.
— Résoudre $f(x) = g(x)$: on obtient le **seuil**.
— Résoudre $f(x) < g(x)$ pour savoir de quel côté chaque offre gagne.
— Conclure en revenant au contexte, avec l'unité.

Interpréter le seuil. Au seuil, les deux offres coûtent exactement pareil. De part et d'autre, celle dont le coefficient directeur est le plus petit finit toujours par gagner.

Contraintes du contexte. Nombre d'objets, de séances, de personnes : ce sont des **entiers positifs**. Le sens de l'arrondi dépend de l'inégalité : « au maximum » arrondit vers le bas, « au minimum » vers le haut.

Le coût moyen. Pour $f(x) = px + b$, le coût par unité vaut

$$\frac{px + b}{x} = p + \frac{b}{x}$$

Il **diminue** quand x grandit et se rapproche de p sans jamais l'atteindre.

Bénéfice et point mort. Bénéfice = recette moins coût. Le point mort est l'antécédent de 0 : au-delà, l'activité devient rentable.

Correction de l'exercice 1 – Deux abonnements de sport

a) L'offre A coûte 320 € quel que soit le nombre de séances : $f(x) = 320$, fonction constante. L'offre B ajoute 5 € par séance à l'inscription : $g(x) = 5x + 40$, fonction affine.

b) Le seuil est le nombre de séances pour lequel les deux offres coûtent autant :

$$5x + 40 = 320 \Leftrightarrow 5x = 280 \Leftrightarrow x = 56$$

En dessous de 56 séances, B est moins chère ; au-delà, A l'emporte, car son prix ne bouge plus.

c) Pour 80 séances, B coûte $5 \times 80 + 40 = 440$ €, contre 320 € pour A. L'économie vaut 120 €, soit 5 € pour chacune des 24 séances au-delà du seuil.

Réponses : $f(x) = 320$ et $g(x) = 5x + 40$; 56 **séances** ; l'**offre A**.

Réponse. a) $f(x) = 320$ et $g(x) = 5x + 40$ · b) 56 séances · c) l'offre A (320 € contre 440 €).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Deux forfaits mobiles

a) Le forfait A coûte toujours 19,99 € ; le forfait B coûte $g(t) = 0{,}15t + 4{,}99$ pour t minutes. Ils coûtent la même chose quand

$$0{,}15t + 4{,}99 = 19{,}99 \Leftrightarrow 0{,}15t = 15 \Leftrightarrow t = 100$$

b) Pour 60 minutes, B coûte $0{,}15 \times 60 + 4{,}99 = 13{,}99$ €, moins que A : B est préférable. Pour 150 minutes, B coûte $22{,}50 + 4{,}99 = 27{,}49$ €, plus que A : A est préférable, avec 7,50 € d’économie, soit 0,15 € pour chacune des 50 minutes au-delà du seuil.

Contrôle : $g(100) = 15 + 4{,}99 = 19{,}99$ €. Réponses : 100 **minutes** ; B à 60 min, A à 150 min.

Réponse. a) 100 minutes · b) B à 60 min (13,99 €), A à 150 min (19,99 € contre 27,49 €).

Correction de l’exercice 3 – Deux locations de voiture

a) L’agence A coûte $f(d) = 0{,}25d + 45$ et l’agence B $g(d) = 0{,}1d + 75$ pour d kilomètres. La distance d’équilibre vérifie

$$0{,}25d + 45 = 0{,}1d + 75 \Leftrightarrow 0{,}15d = 30 \Leftrightarrow d = 200$$

Le prix est alors $0{,}25 \times 200 + 45 = 95$ € dans les deux agences.

b) Pour 350 km, A coûte $87{,}50 + 45 = 132{,}50$ € et B coûte $35 + 75 = 110$ €. Au-delà de 200 km, B l’emporte, car son prix au kilomètre est plus bas ; en dessous, A est préférable.

Contrôle : l’écart vaut $0{,}15 \times (350 - 200) = 22{,}50$ €, comme $132{,}50 - 110$. Réponses : 200 **km** pour 95 **€** ; l’**agence B**.

Réponse. a) 200 km, pour 95 € · b) l’agence B (110 € contre 132,50 €).

Correction de l’exercice 4 – Deux imprimeurs

a) L’imprimeur A coûte $f(n) = 0{,}12n$, fonction linéaire ; l’imprimeur B coûte $g(n) = 0{,}06n + 30$, fonction affine. B est plus avantageux quand

$$0{,}06n + 30 < 0{,}12n \Leftrightarrow 30 < 0{,}06n \Leftrightarrow n > 500$$

À 500 copies, les deux coûtent 60 € ; au-delà, B devient moins cher.

b) Pour 2000 copies, A coûte 240 € et B $120 + 30 = 150$ €, soit 90 € d’économie. Les frais de mise en route se répartissent sur un grand nombre de copies : avec B, la copie revient en moyenne à $\dfrac{150}{2000} = 0{,}075$ €.

Contrôle : $0{,}06 \times (2000 - 500) = 90$ €. Réponses : **au-delà de** 500 **copies** ; 90 **€** d’économie.

Réponse. a) au-delà de 500 copies · b) 90 € d’économie (150 € contre 240 €).

Correction de l’exercice 5 – Vrac ou lot ?

a) Le prix au kilo du lot est le prix divisé par la masse :

$$\frac{14{,}50}{5} = 2{,}90 \text{ €/kg}$$

c’est moins que les 3,20 € du vrac.

b) 5 kg en vrac coûtent $5 \times 3{,}20 = 16$ €, contre 14,50 € en lot : l’économie vaut 1,50 €.

c) Tout en vrac, 12 kg coûtent $12 \times 3{,}20 = 38{,}40$ €. Avec des lots entiers, on prend deux lots (10 kg, 29 €) et 2 kg de vrac (6,40 €), soit 35,40 €. Trois lots coûteraient 43,50 € et donneraient 3 kg de trop.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : 35,40 + 3 = 38,40 €. Réponses : 2,90 **€/kg** ; 1,50 **€** ; 35,40 **€** avec deux lots et du vrac, contre 38,40 € tout en vrac.

Réponse. a) 2,90 €/kg · b) 1,50 € · c) 35,40 € en lots plus vrac, contre 38,40 € tout en vrac.

Correction de l’exercice 6 – Taxi ou véhicule de location

a) Le taxi coûte $f(d) = 1{,}8d + 4$ et la location $g(d) = 1{,}2d + 10$ pour d kilomètres. La distance d’équilibre vérifie

$$1{,}8d + 4 = 1{,}2d + 10 \Leftrightarrow 0{,}6d = 6 \Leftrightarrow d = 10$$

Le prix commun vaut 18 + 4 = 22 €.

b) Pour 5 km, le taxi coûte 13 € et la location 16 € : le taxi est moins cher. Pour 25 km, le taxi coûte 49 € et la location 40 € : la location est moins chère. Sous 10 km, la prise en charge plus faible du taxi l’emporte ; au-delà, c’est le prix au kilomètre plus bas de la location.

Contrôle : à 25 km, l’écart vaut $0{,}6 \times (25 - 10) = 9$ €. Réponses : 10 **km** pour 22 **€** ; taxi à 5 km, location à 25 km.

Réponse. a) 10 km, pour 22 € · b) taxi à 5 km (13 € contre 16 €), location à 25 km (40 € contre 49 €).

Correction de l’exercice 7 – Mensuel ou annuel

a) Sur un an, la formule mensuelle coûte $12 \times 9{,}99 = 119{,}88$ €, contre 89,99 € pour la formule annuelle : l’économie vaut 29,89 €.

b) Réparti sur 12 mois, l’abonnement annuel revient à $\dfrac{89{,}99}{12} \approx 7{,}50$ € par mois.

c) L’abonnement annuel est rentable quand la formule mensuelle coûterait plus cher :

$$9{,}99m > 89{,}99 \Leftrightarrow m > \frac{89{,}99}{9{,}99} \approx 9{,}01$$

Le nombre de mois est entier : il faut au moins 10 mois. À 9 mois, la formule mensuelle coûte 89,91 €, encore un peu moins cher.

Contrôle : à 10 mois, la formule mensuelle coûte 99,90 €. Réponses : 119,88 € contre 89,99 € ; environ 7,50 **€** par mois ; **à partir de** 10 **mois**.

Réponse. a) 119,88 € contre 89,99 € · b) environ 7,50 €/mois · c) à partir de 10 mois.

Correction de l’exercice 8 – Un budget à respecter

a) La dépense comprend le matériel, 180 €, et 16 € par participant : $D(n) = 16n + 180$.

b) La dépense ne doit pas dépasser 500 € :

$$16n + 180 \leq 500 \Leftrightarrow 16n \leq 320 \Leftrightarrow n \leq 20$$

Le club peut accueillir au plus 20 participants ; à 21, il dépenserait 516 €.

c) Pour 20 participants, $D(20) = 320 + 180 = 500$ € : il ne reste rien. Chaque participant revient alors à $\dfrac{500}{20} = 25$ €, soit les 16 € variables plus 9 € de matériel.

Réponses : $D(n) = 16n + 180$; 20 **participants** ; il ne reste **rien**.

Réponse. a) $D(n) = 16n + 180$ · b) 20 participants · c) il ne reste rien.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 9 – Recette, coût et bénéfice

a) La recette vaut $R(x) = 25x$ et le coût total $C(x) = 10x + 900$. Le bénéfice est la recette moins le coût, en retranchant **toute** la parenthèse :

$$B(x) = 25x - (10x + 900) = 15x - 900$$

b) Le point mort est le nombre d’objets pour lequel le bénéfice est nul : $15x = 900$, donc $x = 60$. À 60 objets, recette et coût valent tous deux 1500 € ; en dessous, l’atelier perd de l’argent.

c) $B(100) = 1500 - 900 = 600$ €. Chaque objet vendu au-delà du point mort rapporte 15 €, et $15 \times 40 = 600$ €.

Contrôle : pour 100 objets, la recette vaut 2500 € et le coût 1900 €. Réponses : $B(x) = 15x - 900$; 60 **objets** ; 600 **€**.

Réponse. a) $B(x) = 15x - 900$ · b) 60 objets · c) 600 €.

Correction de l’exercice 10 – Deux étapes à vitesses différentes

a) La durée est la distance divisée par la vitesse : $\frac{120}{60} = 2$ h pour la première étape et $\frac{120}{80} = 1{,}5$ h, soit 1 h 30 min, pour la seconde.

b) La vitesse moyenne se calcule avec la distance totale et la durée totale :

$$v = \frac{240}{3{,}5} \approx 68{,}6 \text{ km/h}$$

c) La moyenne de 60 et 80 vaut 70 km/h : ce n’est **pas** la vitesse moyenne. L’automobiliste roule plus longtemps à 60 km/h (2 h) qu’à 80 km/h (1 h 30), donc la vitesse lente pèse davantage. Avec deux **durées** égales, par exemple 2 h à chaque vitesse, on aurait bien $\frac{280}{4} = 70$ km/h.

Contrôle : $68{,}6 \times 3{,}5 \approx 240$ km. Réponses : 2 h et 1 h 30 ; environ 68,6 **km/h** ; non.

Réponse. a) 2 h et 1 h 30 · b) environ 68,6 km/h · c) non, c’est inférieur à 70.

Correction de l’exercice 11 – La facture d’électricité

a) La facture comprend l’abonnement et le prix des kilowattheures : $F(x) = 0{,}18x + 110$.

b) $F(3500) = 630 + 110 = 740$ €.

c) On cherche l’antécédent de 900 :

$$0{,}18x + 110 = 900 \Leftrightarrow 0{,}18x = 790 \Leftrightarrow x = \frac{790}{0{,}18} \approx 4389$$

Le prix moyen du kilowattheure baisse avec la consommation, environ 0,211 € en b) contre 0,205 € ici, car l’abonnement se répartit sur plus de kilowattheures.

Contrôle : $0{,}18 \times 4389 + 110 \approx 900$ €. Réponses : $F(x) = 0{,}18x + 110$; 740 **€** ; environ 4389 **kWh**.

Réponse. a) $F(x) = 0{,}18x + 110$ · b) 740 € · c) environ 4389 kWh.

Correction de l’exercice 12 – Modéliser à partir d’un tableau

a) Pour une fonction affine, le prix augmente toujours de la même somme par heure supplémentaire. De 1 h à 2 h, il augmente de 45 € ; de 2 h à 4 h, de 90 € en 2 h, soit 45 € par heure ; de 4 h à 6 h, de 90 € en 2 h, encore 45 € par heure. Le taux est constant : le prix est bien affine.

b) Le coefficient vaut 45. Avec $p(1) = 75$: $45 + b = 75$, d’où $b = 30$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$p(h) = 45h + 30$$

45 € est le tarif horaire, 30 € le prix du déplacement, payé même pour une intervention très courte.

c) $p(8) = 360 + 30 = 390$ €. Inversement, $45h + 30 = 390$ donne $45h = 360$, donc $h = 8$ h : les deux questions sont réciproques.

Contrôle : $p(6) = 270 + 30 = 300$ €. Réponses : taux constant de 45 €/h ; $p(h) = 45h + 30$; 390 **€** et 8 **h**.

Réponse. a) taux constant de 45 €/h · b) $p(h) = 45h + 30$ · c) 390 € pour 8 h.

Correction de l’exercice 13 – Trois offres à comparer

a) A : $f(x) = 2x$; B : $g(x) = 1{,}5x + 20$; C : $h(x) = 60$, fonction constante.

b) Entre A et B : $2x = 1{,}5x + 20$ donne $0{,}5x = 20$, soit $x = 40$ unités, pour 80 €. Entre B et C :

$$1{,}5x + 20 = 60 \Leftrightarrow 1{,}5x = 40 \Leftrightarrow x = \frac{80}{3} \approx 26{,}7$$

Dès 27 unités, C est moins chère que B (60 € contre 60,50 €).

c) Pour 30 unités : A coûte 60 €, B 65 €, C 60 € ; A et C sont à égalité. Pour 100 unités : A coûte 200 €, B 170 €, C 60 € ; C est de loin la meilleure. Plus le volume est grand, plus le forfait s’impose.

Réponses : $2x$, $1{,}5x + 20$ et 60 ; 40 **unités** et environ 26,7 **unités** ; A ou C pour 30, **C** pour 100.

Réponse. a) $2x$, $1{,}5x + 20$, 60 · b) 40 unités (A/B) et environ 26,7 (B/C) · c) A ou C à 60 € pour 30 ; C pour 100.

Correction de l’exercice 14 – Comparer deux évolutions

a) Avec A, le capital est multiplié par 1,04 chaque année, donc par $1{,}04^2 = 1{,}0816$ en deux ans : 1000 € deviennent 1081,60 €. Avec B, il est multiplié par 1,08 puis par 1 : on obtient 1080 €.

A rapporte un peu plus, 1,60 € de plus : la seconde année, les 4 % s’appliquent aussi aux intérêts de la première (1000 → 1040 → 1081,60).

b) On cherche un coefficient annuel k tel que $k \times k = 1{,}08$, c’est-à-dire $k^2 = 1{,}08$. Comme k est positif :

$$k = \sqrt{1{,}08} \approx 1{,}0392$$

soit un taux annuel d’environ 3,92 %, un peu moins que 4 %, ce qui confirme a).

Contrôle : $1{,}0392^2 \approx 1{,}0800$. Réponses : 1081,60 **€** contre 1080 **€** ; environ 3,92 % par an.

Réponse. a) 1081,60 € avec A contre 1080 € avec B · b) environ 3,92 % par an.

Correction de l’exercice 15 – Le seuil d’un abonnement de train

a) Sans la carte, n trajets coûtent $f(n) = 32n$. Avec la carte, chaque trajet coûte la moitié, 16 €, et l’on ajoute le prix de la carte : $g(n) = 16n + 75$.

b) La carte est rentable quand elle fait payer moins :

$$16n + 75 < 32n \Leftrightarrow 75 < 16n \Leftrightarrow n > \frac{75}{16} \approx 4{,}69$$

Le nombre de trajets est entier : il en faut au moins 5. À 4 trajets, on paierait 139 € avec

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

la carte contre 128 € sans ; à 5, 155 € contre 160 €.

c) Pour 12 trajets : 384 € sans la carte, $16 \times 12 + 75 = 267$ € avec, soit 117 € d'économie.

Contrôle : l'économie vaut aussi $16 \times 12 - 75 = 117$ €. Réponses : $32n$ et $16n + 75$; **à partir de** 5 **trajets** ; 117 **€**.

Réponse. a) $32n$ et $16n + 75$ · b) à partir de 5 trajets · c) 117 € d'économie.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : le club de photographie

a) Formule A : $f(n) = 8n$, linéaire. Formule B : $g(n) = 3n + 60$, affine.

b) Les coûts sont égaux quand $8n = 3n + 60$, soit $5n = 60$ et $n = 12$ séances, pour 96 € avec chaque formule.

c) Avec A : $8n \leq 200$ donne $n \leq 25$, soit 25 séances. Avec B :

$$3n + 60 \leq 200 \Leftrightarrow 3n \leq 140 \Leftrightarrow n \leq 46{,}7$$

Le nombre de séances est entier : 46 séances, pour 198 € (47 coûteraient 201 €).

d) Pour 25 séances, A coûte 200 € et B $75 + 60 = 135$ € : il faut conseiller la formule B, qui fait économiser 65 €, soit 5 € pour chacune des 13 séances au-delà du seuil.

Réponses : $8n$ et $3n + 60$; 12 **séances** à 96 € ; 25 avec A, 46 avec B ; la **formule B**.

Réponse. a) $8n$ et $3n + 60$ · b) 12 séances à 96 € · c) 25 avec A, 46 avec B · d) la formule B (135 € contre 200 €).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).