Plaquette 3 – Fonctions affines : déterminer, représenter, exploiter

Fonctions linéaires et affines — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux coefficients.

Coefficient	Nom	Lecture graphique
a	coefficient directeur	pente : on avance de 1, on monte de a
b	ordonnée à l'origine	$f(0)$, hauteur où la droite coupe l'axe des ordonnées

Déterminer a à partir de deux points.

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Puis on trouve b en reportant un des deux points dans $f(x) = ax + b$.

Sens de variation.

Signe de a	Variation
$a > 0$	croissante
$a < 0$	décroissante
$a = 0$	constante

Points remarquables.

Point	Comment l'obtenir
axe des ordonnées	on pose $x = 0$, ordonnée b
axe des abscisses	on résout $ax + b = 0$, abscisse $-\frac{b}{a}$

Positions relatives de deux droites. Mêmes a : parallèles. a différents : sécantes, et l'abscisse du point d'intersection est la solution de $f(x) = g(x)$.

Signe de $f(x)$. On résout $ax + b > 0$: attention, diviser par a négatif retourne l'inégalité.

Vérifier qu'un tableau vient d'une fonction affine. On calcule $\frac{\text{variation des images}}{\text{variation des antécédents}}$ entre plusieurs couples : elle doit être constante.

Correction de l'exercice 1 – Deux images données

Une fonction affine s'écrit $f(x) = ax + b$. Le coefficient a est la variation des images divisée par celle des antécédents : de $x = 1$ à $x = 4$, l'image passe de 5 à 14.

$$a = \frac{14 - 5}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$$

On reporte $f(1) = 5$: $3 \times 1 + b = 5$, d'où $b = 2$, et $f(x) = 3x + 2$.

La fonction est croissante, car $a = 3 > 0$. On en tire facilement d'autres renseignements : l'antécédent de 20 vérifie $3x + 2 = 20$, soit $x = 6$.

Contrôle : $f(4) = 12 + 2 = 14$. La fonction est $f(x) = 3x + 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f(x) = 3x + 2$.

Correction de l'exercice 2 – L'ordonnée à l'origine connue

L'image de 0 donne directement l'ordonnée à l'origine : $f(0) = a \times 0 + b = b$, donc $b = -3$. Le coefficient se calcule entre $x = 0$ et $x = 5$:

$$a = \frac{7 - (-3)}{5 - 0} = \frac{10}{5} = 2$$

Ainsi $f(x) = 2x - 3$, et $f(-2) = -4 - 3 = -7$.

La fonction est croissante : on vérifie que $f(-2) < f(0) < f(5)$, soit $-7 < -3 < 7$. Sa droite coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;-3)$ et l'axe des abscisses en $(1{,}5\,;0)$, car $2x - 3 = 0$ donne $x = 1{,}5$.

Contrôle : $f(5) = 10 - 3 = 7$. Réponses : $f(x) = 2x - 3$ et $f(-2) = -7$.

Réponse. $f(x) = 2x - 3$ et $f(-2) = -7$.

Correction de l'exercice 3 – Un coefficient négatif

On calcule le coefficient entre $x = -2$ et $x = 3$, en faisant attention aux signes :

$$a = \frac{-6 - 9}{3 - (-2)} = \frac{-15}{5} = -3$$

On reporte $f(3) = -6$: $-3 \times 3 + b = -6$, soit $-9 + b = -6$, d'où $b = 3$. Donc $f(x) = -3x + 3$.

Le coefficient $a = -3$ est négatif : f est **décroissante**. C'est cohérent avec les données : quand x passe de -2 à 3, l'image passe de 9 à -6.

Contrôle : $f(-2) = 6 + 3 = 9$. La fonction est $f(x) = -3x + 3$, décroissante.

Réponse. $f(x) = -3x + 3$, décroissante.

Correction de l'exercice 4 – Représenter une droite

a) Sur l'axe des ordonnées, $x = 0$: $f(0) = 4$, d'où le point $(0\,;4)$. Sur l'axe des abscisses, l'image est nulle : $-2x + 4 = 0$ donne $x = 2$, d'où le point $(2\,;0)$.

b) On choisit une autre valeur, par exemple $x = 3$: $f(3) = -6 + 4 = -2$, d'où le point $(3\,;-2)$.

c) Le coefficient vaut -2 : quand on avance de 1 vers la droite, on **descend** de 2. Par exemple, de $(0\,;4)$ on arrive à $(1\,;2)$.

$$f(1) = -2 + 4 = 2$$

La fonction est décroissante ; elle est positive pour $x < 2$ et négative pour $x > 2$.

Réponses : $(0\,;4)$ et $(2\,;0)$; par exemple $(3\,;-2)$; on descend de 2 quand on avance de 1.

Réponse. a) $(0\,;4)$ et $(2\,;0)$ · b) par exemple $(3\,;-2)$ · c) on descend de 2 quand on avance de 1.

Correction de l'exercice 5 – Lire une droite

a) Le point A a pour abscisse 0 : son ordonnée est l'ordonnée à l'origine, $b = -1$. Le coefficient se calcule entre A et B :

$$a = \frac{5 - (-1)}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2$$

donc $f(x) = 2x - 1$. Sur le graphique, on vérifie qu'en avançant de 1, la droite monte de 2.

b) $f(10) = 20 - 1 = 19$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) On calcule l'image de l'abscisse de C : $f(-2) = -4 - 1 = -5$, égale à l'ordonnée de C. Le point C **est** sur la droite.

Contrôle avec B : $f(3) = 6 - 1 = 5$. Réponses : $f(x) = 2x - 1$; 19 ; **oui**.

Réponse. a) $f(x) = 2x - 1$ · b) 19 · c) oui.

Correction de l'exercice 6 – Sens de variation

Le sens de variation d'une fonction affine se lit sur le signe du coefficient a, et l'image de 0 est l'ordonnée à l'origine b.

a) $a = 7 > 0$: f est **croissante** ; $f(0) = -2$.

b) $a = -0{,}5 < 0$: g est **décroissante** ; $g(0) = 6$.

c) $h(x) = 0 \times x + 4$: $a = 0$, h est **constante** ; $h(0) = 4$, et sa droite est horizontale.

d) On sépare la fraction pour retrouver la forme $ax + b$:

$$k(x) = \frac{3 - x}{2} = -0{,}5x + 1{,}5$$

$a = -0{,}5 < 0$: k est **décroissante** ; $k(0) = 1{,}5$.

g et k ont le même coefficient : leurs droites sont parallèles, séparées verticalement de $6 - 1{,}5 = 4{,}5$. Réponses : croissante, -2 ; décroissante, 6 ; constante, 4 ; décroissante, 1,5.

Réponse. a) croissante, -2 · b) décroissante, 6 · c) constante, 4 · d) décroissante, 1,5.

Correction de l'exercice 7 – Images et antécédents

a) $f(3) = 15 - 8 = 7$ et $f(-1) = -5 - 8 = -13$.

b) Pour l'antécédent de 12, on résout $5x - 8 = 12$: $5x = 20$, donc $x = 4$. Pour celui de -8, on résout $5x - 8 = -8$: $5x = 0$, donc $x = 0$. C'est cohérent : -8 est l'ordonnée à l'origine, l'image de 0.

c) On cherche le nombre égal à son image :

$$5x - 8 = x \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$$

Graphiquement, la droite de f coupe la droite d'équation $y = x$ au point $(2\,;2)$; il n'y a qu'un point, car les coefficients 5 et 1 sont différents.

Contrôle : $f(2) = 10 - 8 = 2$. Réponses : 7 et -13 ; 4 et 0 ; $x = 2$.

Réponse. a) 7 et -13 · b) 4 et 0 · c) $x = 2$.

Correction de l'exercice 8 – Couper les axes

a) Sur l'axe des ordonnées, $x = 0$: $f(0) = -9$, d'où le point $(0\,;-9)$. Sur l'axe des abscisses, $3x - 9 = 0$ donne $x = 3$, d'où le point $(3\,;0)$.

b) Le triangle a pour sommets l'origine, $(3\,;0)$ et $(0\,;-9)$. Ses deux côtés issus de l'origine sont portés par les axes, qui sont perpendiculaires : il est rectangle en l'origine. Ses côtés de l'angle droit mesurent 3 et 9 :

$$A = \frac{3 \times 9}{2} = 13{,}5$$

Contrôle : le triangle occupe la moitié du rectangle de 3 sur 9, d'aire 27. Réponses : $(0\,;-9)$ et $(3\,;0)$; 13,5 **unités d'aire**.

Réponse. a) $(0\,;-9)$ et $(3\,;0)$ · b) 13,5 unités d'aire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Droites parallèles

a) Les deux fonctions ont le même coefficient, 2, mais des ordonnées à l'origine différentes, 1 et -4 : leurs droites sont **strictement parallèles**.

b) On retranche en mettant des parenthèses :

$$f(x) - g(x) = (2x + 1) - (2x - 4) = 2x + 1 - 2x + 4 = 5$$

La différence ne dépend pas de x : la droite de f est toujours 5 unités au-dessus de celle de g. Par exemple, $f(10) = 21$ et $g(10) = 16$.

c) $f(x) = g(x)$ équivaudrait à $f(x) - g(x) = 0$, c'est-à-dire $5 = 0$: c'est impossible. L'équation n'a **aucune** solution, ce qui est cohérent avec deux droites parallèles distinctes, qui ne se coupent jamais.

Réponses : oui ; $f(x) - g(x) = 5$, écart constant ; non.

Réponse. a) oui · b) $f(x) - g(x) = 5$, écart constant · c) non, aucune solution.

Correction de l'exercice 10 – Deux droites sécantes

Le point d'intersection des droites correspond à l'égalité des deux images :

$$3x - 1 = -2x + 9 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$$

et $f(2) = 6 - 1 = 5$: le point d'intersection est $(2\,;5)$.

Pour comparer f et g, on étudie le signe de leur différence :
$f(x) - g(x) = 3x - 1 + 2x - 9 = 5x - 10 = 5(x - 2)$. Elle a le signe de $x - 2$: positive pour $x > 2$, négative pour $x < 2$.

Contrôle : $f(0) = -1 < g(0) = 9$ et $f(4) = 11 > g(4) = 1$. Le point d'intersection est $(2\,;5)$; $f(x) < g(x)$ pour $x < 2$ et $f(x) > g(x)$ pour $x > 2$.

Réponse. Point $(2\,;5)$; $f(x) < g(x)$ pour $x < 2$ et $f(x) > g(x)$ pour $x > 2$.

Correction de l'exercice 11 – Signe d'une fonction affine

On cherche d'abord où la fonction s'annule, puis on résout les inéquations en surveillant le signe du coefficient -4.

— $f(x) = 0$: $-4x + 12 = 0$ donne $-4x = -12$, donc $x = 3$.

— $f(x) > 0$: $-4x > -12$. On divise par -4, nombre négatif, ce qui change le sens :

$$x < 3$$

— $f(x) < 0$: par le même raisonnement, $x > 3$.

La fonction est décroissante : elle est positive **avant** son zéro, négative **après**. Graphiquement, la droite descend et coupe l'axe des abscisses en $x = 3$.

Contrôle : $f(0) = 12 > 0$ et $f(5) = -8 < 0$. Réponses : $f(x) > 0$ pour $x < 3$, $f(x) = 0$ pour $x = 3$, $f(x) < 0$ pour $x > 3$.

Réponse. $f(x) > 0$ pour $x < 3$ · $f(x) = 0$ pour $x = 3$ · $f(x) < 0$ pour $x > 3$.

Correction de l'exercice 12 – Un tableau est-il affine ?

Pour une fonction affine, la variation de l'image divisée par la variation de x est toujours la même, égale au coefficient a. On calcule ce taux entre colonnes successives.

— Pour f : de 0 à 2, $\dfrac{7-1}{2} = 3$; de 2 à 5, $\dfrac{16-7}{3} = 3$; de 5 à 6, $\dfrac{19-16}{1} = 3$. Le taux est constant : f peut être affine, avec $a = 3$ et $b = f(0) = 1$, soit

$$f(x) = 3x + 1$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Pour g : les trois premières colonnes donnent le même taux 3, mais de 5 à 6, $\frac{20-16}{1}=4$. Le taux change : g ne peut pas être affine. La formule $3x+1$ donnerait 19, et non 20.

Conclusion : seul le premier tableau peut provenir d'une fonction affine, $f(x)=3x+1$.

Réponse. Seul f peut être affine : $f(x)=3x+1$.

Correction de l'exercice 13 – La course en taxi

a) Le prix est une fonction affine $p(d)=ad+b$. Le coefficient se calcule entre les deux courses :

$$a=\frac{18{,}4-9{,}4}{10-4}=\frac{9}{6}=1{,}5$$

On reporte la course de 4 km : $1{,}5\times 4+b=9{,}4$, soit $6+b=9{,}4$, d'où $b=3{,}4$. Donc $p(d)=1{,}5d+3{,}4$.

b) 1,5 est le prix d'un kilomètre, en euros ; 3,4 est le prix payé pour une distance nulle, $p(0)=3{,}40$ € : c'est la prise en charge.

c) On résout $1{,}5d+3{,}4=25{,}9$: $1{,}5d=22{,}5$, donc $d=15$ km.

Contrôle : $p(10)=15+3{,}4=18{,}40$ € et $p(15)=22{,}5+3{,}4=25{,}90$ €. Réponses : $p(d)=1{,}5d+3{,}4$; 1,50 €/km et 3,40 € de prise en charge ; 15 **km**.

Réponse. a) $p(d)=1{,}5d+3{,}4$ · b) 1,50 €/km et 3,40 € de prise en charge · c) 15 km.

Correction de l'exercice 14 – Celsius et Fahrenheit

a) $F(0)=32$: la glace fond à 32 degrés Fahrenheit. $F(20)=36+32=68$ et $F(100)=180+32=212$: l'eau bout à 212 degrés Fahrenheit.

b) On cherche l'antécédent de 98,6 :

$$1{,}8c+32=98{,}6\Leftrightarrow 1{,}8c=66{,}6\Leftrightarrow c=37$$

C'est la température du corps humain.

c) Les deux échelles coïncident quand $F(c)=c$: $1{,}8c+32=c$, soit $0{,}8c=-32$, donc $c=-40$. Il n'y a qu'une telle température, car les coefficients 1,8 et 1 sont différents.

Contrôle : $1{,}8\times(-40)+32=-72+32=-40$. Réponses : 32, 68 et 212 ; 37 **degrés Celsius** ; oui, à -40 **degrés**.

Réponse. a) 32, 68 et 212 · b) 37 degrés Celsius · c) oui, à -40 degrés.

Correction de l'exercice 15 – Un réservoir qui se vide

a) Le volume part de 450 L et diminue de 18 L chaque heure : $V(t)=450-18t$, fonction affine décroissante.

b) $V(10)=450-180=270$ L.

c) Le réservoir est vide quand $V(t)=0$: $450-18t=0$, soit $18t=450$, donc $t=25$ h. Le modèle n'a de sens que pour t compris entre 0 et 25.

d) On résout $450-18t<100$. On retranche 450, puis on divise par -18, nombre négatif, ce qui change le sens :

$$-18t<-350\Leftrightarrow t>\frac{350}{18}\approx 19{,}44$$

Or $\frac{350}{18}$ h $= 19$ h $+\frac{8}{18}$ h, et $\frac{8}{18}\times 60\approx 26{,}7$ min : le seuil est franchi au bout de 19 h 26 min 40 s.

Contrôle : $V(19)=108$ L et $V(20)=90$ L. Réponses : $V(t)=450-18t$; 270 L ; 25 **h** ;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

au-delà d’environ 19 **h** 27 **min**.

Réponse. a) $V(t) = 450 - 18t$ · b) 270 L · c) 25 h · d) au-delà de 19 h 26 min 40 s, soit environ 19 h 27 min.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : une fonction affine complète

a) Le coefficient se calcule entre $x = 2$ et $x = 6$:

$$a = \frac{7 - (-1)}{6 - 2} = \frac{8}{4} = 2$$

On reporte $f(2) = -1$: $4 + b = -1$, d’où $b = -5$ et $f(x) = 2x - 5$.

b) $a = 2 > 0$: f est **croissante**, et $f(0) = -5$.

c) La droite coupe l’axe des ordonnées en $(0\,;-5)$; elle coupe l’axe des abscisses quand $2x - 5 = 0$, soit en $(2{,}5\,;0)$.

d) On résout $2x - 5 \geq 3$: $2x \geq 8$, puis on divise par 2, positif, ce qui conserve le sens : $x \geq 4$.

Contrôle : $f(6) = 12 - 5 = 7$ et $f(4) = 3$. Réponses : $f(x) = 2x - 5$; croissante, $f(0) = -5$; $(0\,;-5)$ et $(2{,}5\,;0)$; $x \geq 4$.

Réponse. a) $f(x) = 2x - 5$ · b) croissante, $f(0) = -5$ · c) $(0\,;-5)$ et $(2{,}5\,;0)$ · d) $x \geq 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).