Plaquette 2 – Fonctions linéaires et proportionnalité

Fonctions linéaires et affines — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. f est linéaire s'il existe un nombre a tel que $f(x) = ax$ pour tout x. Le nombre a est le **coefficient**.

Propriété	Écriture
image de 0	$f(0) = 0$
coefficient à partir d'une image	$a = \dfrac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$
doubler l'antécédent	$f(2x) = 2f(x)$
somme	$f(x+y) = f(x) + f(y)$

Représentation graphique. Une droite **passant par l'origine**. Le coefficient a se lit comme une pente : en avançant de 1, on monte de a.

Reconnaître une fonction linéaire.

Écriture	Linéaire ?
$f(x) = 5x$	oui, $a = 5$
$f(x) = \dfrac{x}{4}$	oui, $a = 0{,}25$
$f(x) = 3x - 2$	non, elle est affine
$f(x) = x^2$	non
$f(x) = 0$	oui, $a = 0$

Lien avec la proportionnalité. Un tableau de proportionnalité de coefficient a est exactement la table de valeurs de $f(x) = ax$. Pour tester la proportionnalité, on vérifie que tous les quotients $\dfrac{f(x)}{x}$ sont égaux.

Chercher un antécédent. On résout $ax = k$, ce qui donne $x = \dfrac{k}{a}$ si $a \neq 0$. Par exemple, pour $f(x) = 2{,}5x$, l'antécédent de 40 vérifie

$$2{,}5x = 40 \Leftrightarrow x = \frac{40}{2{,}5} = 16$$

Attention à l'aire. Si les longueurs sont multipliées par k, les aires le sont par k^2 : la relation entre les aires n'est pas la même fonction linéaire que celle entre les longueurs.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une fonction linéaire

Une fonction est linéaire si son expression peut s'écrire ax, sans terme constant. Le nombre a est alors son coefficient.

a) $f(x) = 5x$: **linéaire**, de coefficient 5.

b) $g(x) = 3x - 2$: le terme constant -2 l'empêche d'être linéaire ; elle est affine. D'ailleurs $g(0) = -2 \neq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Diviser par 4 revient à multiplier par 0,25 : $h(x) = 0{,}25x$, **linéaire**, de coefficient 0,25.

d) $k(x) = x^2$: la variable est au carré, k n'est **pas** linéaire. Les quotients $\frac{k(1)}{1} = 1$ et $\frac{k(2)}{2} = 2$ ne sont pas égaux.

e) $m(x) = -7x$: **linéaire**, de coefficient -7.

$$f(x) = 5x \qquad h(x) = 0{,}25x \qquad m(x) = -7x$$

Une fonction linéaire vérifie toujours $f(0) = 0$, mais la réciproque est fausse : $k(0) = 0$ et k n'est pas linéaire. **Bilan** : f, h et m sont linéaires.

Réponse. f ($a = 5$), h ($a = 0{,}25$) et m ($a = -7$) sont linéaires.

Correction de l'exercice 2 – Déterminer le coefficient

a) Une fonction linéaire s'écrit $f(x) = ax$. L'égalité $f(4) = 10$ donne $4a = 10$, donc $a = 2{,}5$ et

$$f(x) = 2{,}5x$$

b) $f(6) = 2{,}5 \times 6 = 15$. On le retrouve par proportionnalité : $6 = 1{,}5 \times 4$, donc $f(6) = 1{,}5 \times 10 = 15$.

c) On résout $2{,}5x = 40$: $x = \frac{40}{2{,}5} = 16$. Par proportionnalité aussi : $40 = 4 \times 10$, donc l'antécédent vaut $4 \times 4 = 16$.

Contrôle : $2{,}5 \times 16 = 40$. Réponses : $f(x) = 2{,}5x$; $f(6) = 15$; l'antécédent de 40 est 16.

Réponse. a) $f(x) = 2{,}5x$ · b) $f(6) = 15$ · c) l'antécédent de 40 est 16.

Correction de l'exercice 3 – Coefficient négatif

On calcule les images en surveillant la règle des signes : le produit de deux nombres de signes contraires est négatif, celui de deux négatifs est positif.

— $f(2) = -3 \times 2 = -6$.
— $f(-5) = -3 \times (-5) = 15$.
— Antécédent de 21 : on résout $-3x = 21$ en divisant par -3 :

$$x = \frac{21}{-3} = -7$$

Le coefficient -3 est négatif : f est décroissante, et sa droite, qui passe par l'origine et par $(1\,;-3)$, descend de gauche à droite.

Contrôle : $-3 \times (-7) = 21$. Réponses : $f(2) = -6$; $f(-5) = 15$; l'antécédent de 21 est -7.

Réponse. $f(2) = -6$ · $f(-5) = 15$ · l'antécédent de 21 est -7.

Correction de l'exercice 4 – Un tableau de proportionnalité

y est proportionnel à x avec le coefficient 3,5 : on obtient chaque valeur de y en multipliant x par 3,5.

— $3{,}5 \times 2 = 7$ et $3{,}5 \times 5 = 17{,}5$.
— $3{,}5 \times 8 = 28$ et $3{,}5 \times 12 = 42$.

x	2	5	8	12
y	7	17,5	28	42

On en déduit l'expression

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$y = 3{,}5x$$

C'est une fonction linéaire. On peut aussi utiliser la linéarité : de $x = 2$ à $x = 8$, on multiplie par 4, donc y passe de 7 à $7 \times 4 = 28$.

Contrôle : $\frac{42}{12} = 3{,}5$. Le tableau se complète par 7, 17,5, 28 et 42.

Réponse. 7 · 17,5 · 28 · 42 ; et $y = 3{,}5x$.

Correction de l'exercice 5 – Représenter graphiquement

a) La droite d'une fonction linéaire passe toujours par l'origine, $(0\,;0)$. On calcule deux autres images : $f(2) = 3$ et $f(4) = 6$, d'où les points $(2\,;3)$ et $(4\,;6)$.

b) Le coefficient se lit comme une pente : en partant d'un point de la droite, quand on avance de 1 vers la droite, on monte de 1,5. Pour rester sur les nœuds du quadrillage, on avance plutôt de 2 et on monte de 3.

c) Un point est sur la droite si son ordonnée est l'image de son abscisse.

$$f(10) = 1{,}5 \times 10 = 15$$

Le point $A(10\,;15)$ appartient donc à la droite. En revanche $f(6) = 9 \neq 10$: le point $B(6\,;10)$ n'y est pas, le point de la droite d'abscisse 6 est $(6\,;9)$.

Réponses : $(0\,;0)$, $(2\,;3)$ et $(4\,;6)$; on avance de 2, on monte de 3 ; A oui, B non.

Réponse. a) $(0\,;0)$, $(2\,;3)$, $(4\,;6)$ · b) en avançant de 2, on monte de 3 · c) A oui, B non.

Correction de l'exercice 6 – Lire un coefficient sur un graphique

a) La droite passe par l'origine : elle représente une fonction linéaire $f(x) = ax$. Le point $M(4\,;10)$ donne $4a = 10$, donc $a = 2{,}5$ et $f(x) = 2{,}5x$.

b) L'ordonnée du point d'abscisse 7 est l'image de 7 : $f(7) = 2{,}5 \times 7 = 17{,}5$.

c) L'abscisse du point d'ordonnée -5 est l'antécédent de -5 :

$$2{,}5x = -5 \Leftrightarrow x = -2$$

Le point $(-2\,;-5)$ a ses deux coordonnées négatives : il est en bas à gauche de l'origine, ce qui est cohérent avec une droite qui monte.

Contrôle : $2{,}5 \times (-2) = -5$. Réponses : $f(x) = 2{,}5x$; 17,5 ; -2.

Réponse. a) $f(x) = 2{,}5x$ · b) 17,5 · c) -2.

Correction de l'exercice 7 – Un agrandissement

Dans un agrandissement de coefficient 2,5, toutes les longueurs sont multipliées par 2,5 : c'est la fonction linéaire $f(x) = 2{,}5x$.

a) $f(6) = 2{,}5 \times 6 = 15$ cm.

b) On cherche l'antécédent de 15 : $2{,}5x = 15$, donc $x = 6$ cm. C'est le segment de la question a).

c) Non. L'aire dépend de deux longueurs, chacune multipliée par 2,5 : l'aire est multipliée par

$$2{,}5^2 = 6{,}25$$

Par exemple, un carré de 4 cm de côté, d'aire 16 cm², devient un carré de 10 cm de côté, d'aire 100 cm², et $\frac{100}{16} = 6{,}25$. De même, les volumes seraient multipliés par $2{,}5^3 = 15{,}625$.

Réponses : 15 **cm** ; 6 **cm** ; non, l'aire est multipliée par 6,25.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) 15 cm · b) 6 cm · c) non : l'aire est multipliée par 6,25.

Correction de l'exercice 8 – Convertir des miles

a) La distance en kilomètres est proportionnelle au nombre de miles, avec le coefficient 1,609 : $f(x) = 1{,}609x$.

b) $f(5) = 1{,}609 \times 5 = 8{,}045$ km, soit environ 8 km.

c) On cherche l'antécédent de 100 : $1{,}609x = 100$, donc

$$x = \frac{100}{1{,}609} \approx 62{,}2$$

Ordre de grandeur : un mile vaut un peu plus de 1,6 km, et $100 \div 1{,}6 = 62{,}5$, ce qui confirme le résultat. La conversion inverse est aussi linéaire, de coefficient $\frac{1}{1{,}609} \approx 0{,}62$: 1 km vaut environ 0,62 mile.

Contrôle : $1{,}609 \times 62{,}2 \approx 100{,}08$ km. Réponses : $f(x) = 1{,}609x$; 8,045 **km** ; environ 62,2 **miles**.

Réponse. a) $f(x) = 1{,}609x$ · b) 8,045 km · c) environ 62,2 miles.

Correction de l'exercice 9 – Une vitesse constante

a) À vitesse constante, la distance est proportionnelle à la durée : $d(t) = 72t$, fonction linéaire.

b) 2 h 30 min font 2,5 h, car une demi-heure vaut 0,5 h :

$$d(2{,}5) = 72 \times 2{,}5 = 180$$

Le train parcourt 180 km : 144 km en 2 h, plus 36 km en une demi-heure.

c) On cherche l'antécédent de 288 : $72t = 288$, donc $t = 4$ h.

On peut aussi exprimer la vitesse en mètres par seconde : $72 \text{ km/h} = \frac{72\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$.

Contrôle : $72 \times 4 = 288$ km. Réponses : $d(t) = 72t$; 180 **km** ; 4 **heures**.

Réponse. a) $d(t) = 72t$ · b) 180 km · c) 4 heures.

Correction de l'exercice 10 – Un prix au kilo

a) Le prix au kilo est le prix divisé par la masse : $\frac{7{,}35}{3} = 2{,}45$ €. Le prix est proportionnel à la masse : $f(m) = 2{,}45m$.

b) $f(5) = 2{,}45 \times 5 = 12{,}25$ €.

c) On cherche l'antécédent de 19,60 :

$$2{,}45m = 19{,}6 \Leftrightarrow m = \frac{19{,}6}{2{,}45} = 8$$

On pouvait aussi raisonner sans le prix au kilo : 8 kg, c'est $\frac{8}{3}$ de 3 kg, et $7{,}35 \times \frac{8}{3} = 19{,}60$ €.

Contrôle : $2{,}45 \times 8 = 19{,}60$ €. Réponses : 2,45 €/kg et $f(m) = 2{,}45m$; 12,25 **€** ; 8 **kg**.

Réponse. a) 2,45 €/kg et $f(m) = 2{,}45m$ · b) 12,25 € · c) 8 kg.

Correction de l'exercice 11 – Comparer deux fonctions linéaires

Pour comparer $f(x)$ et $g(x)$, on étudie le signe de leur différence :

$$g(x) - f(x) = 6x - 4x = 2x$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Cette différence a le signe de x.

— Si $x > 0$, elle est positive : $g(x) > f(x)$. Par exemple, $f(3) = 12$ et $g(3) = 18$.
— Si $x = 0$, elle est nulle : $f(0) = g(0) = 0$, les deux droites se croisent à l'origine.
— Si $x < 0$, elle est négative : $g(x) < f(x)$. Par exemple, $f(-3) = -12$ et $g(-3) = -18$, et $-18 < -12$.

Piège : le plus grand coefficient ne donne pas toujours la plus grande image ; c'est vrai seulement pour $x > 0$. La droite de g, plus pentue, est au-dessus à droite de l'origine et en dessous à gauche.

Réponse. $g(x) > f(x)$ si $x > 0$ · égalité si $x = 0$ · $g(x) < f(x)$ si $x < 0$.

Correction de l'exercice 12 – Doubler l'antécédent

Une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité : si l'on multiplie x par un nombre, son image est multipliée par le même nombre.

a) De 3 à 6, on multiplie par 2 : $f(6) = 2 \times 8 = 16$. De 3 à 9, on multiplie par 3 : $f(9) = 3 \times 8 = 24$.

b) De 3 à 1,5, on divise par 2 : $f(1{,}5) = 8 \div 2 = 4$.

c) Le coefficient est $a = \dfrac{f(3)}{3}$, d'où

$$f(x) = \frac{8}{3}x$$

avec $\dfrac{8}{3} \approx 2{,}67$. La propriété utilisée en a) et b) évitait de manipuler cette fraction.

Contrôle : $\dfrac{8}{3} \times 6 = \dfrac{48}{3} = 16$. Réponses : 16 et 24 ; 4 ; $f(x) = \dfrac{8}{3}x$.

Réponse. a) 16 et 24 · b) 4 · c) $f(x) = \dfrac{8}{3}x$.

Correction de l'exercice 13 – Une recette de cuisine

a) La masse de farine est proportionnelle au nombre de personnes. Pour une personne, il faut $\dfrac{250}{4} = 62{,}5$ g, donc $f(n) = 62{,}5n$.

b) $f(10) = 62{,}5 \times 10 = 625$ g. Par proportionnalité : $10 = 2{,}5 \times 4$, donc il faut $2{,}5 \times 250 = 625$ g.

c) On cherche l'antécédent de 375 :

$$62{,}5n = 375 \Leftrightarrow n = 6$$

Par proportionnalité : $375 = 1{,}5 \times 250$, donc la recette convient pour $1{,}5 \times 4 = 6$ personnes, un nombre entier comme il se doit.

Contrôle : $62{,}5 \times 6 = 375$ g. Réponses : $f(n) = 62{,}5n$; 625 **g** ; 6 **personnes**.

Réponse. a) $f(n) = 62{,}5n$ · b) 625 g · c) 6 personnes.

Correction de l'exercice 14 – Un change de devises

a) Le montant en livres est proportionnel au montant en euros, avec le coefficient 0,86 : $f(x) = 0{,}86x$, fonction linéaire.

b) $f(250) = 0{,}86 \times 250 = 215$ £.

c) On cherche l'antécédent de 430 :

$$0{,}86x = 430 \Leftrightarrow x = \frac{430}{0{,}86} = 500$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

La conversion inverse est linéaire de coefficient $\frac{1}{0{,}86} \approx 1{,}16$: une livre vaut environ 1,16 €. Ce coefficient n'est pas « 1 + 0,14 » : les deux conversions ne sont pas symétriques autour de 1.

Contrôle : $0{,}86 \times 500 = 430$ £. Réponses : $f(x) = 0{,}86x$; 215 **£** ; 500 **€**.

Réponse. a) $f(x) = 0{,}86x$ · b) 215 £ · c) 500 €.

Correction de l'exercice 15 – Proportionnel ou non ?

Le prix est proportionnel à la masse si le quotient $\frac{\text{prix}}{\text{masse}}$ est le même dans toutes les colonnes. Or $\frac{6}{1} = 6$ et $\frac{9}{2} = 4{,}5$: le prix n'est **pas** proportionnel à la masse.

On remarque en revanche que le prix augmente toujours de 3 € par kilo supplémentaire, de 1 à 2 kg comme de 4 à 5 kg : c'est le comportement d'une fonction affine $f(m) = am + b$, avec

$$a = \frac{9 - 6}{2 - 1} = 3$$

Avec $f(1) = 6$: $3 + b = 6$, d'où $b = 3$ et $f(m) = 3m + 3$. Les 3 € fixes sont des frais de dossier, et l'on paie 3 € par kilo.

Contrôle : $f(4) = 15$ € et $f(5) = 18$ €, conformes au tableau. Le prix suit la fonction affine $f(m) = 3m + 3$.

Réponse. Non : le prix suit la fonction affine $f(m) = 3m + 3$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : linéaire de bout en bout

a) Chaque page coûte 0,06 € : $f(n) = 0{,}06n$, fonction linéaire.

b) $f(450) = 0{,}06 \times 450 = 27$ €.

c) On cherche l'antécédent de 36 :

$$0{,}06n = 36 \Leftrightarrow n = \frac{36}{0{,}06} = 600$$

d) Oui : le coût est proportionnel au nombre de pages, puisque $\frac{27}{450} = \frac{36}{600} = 0{,}06$. Et $f(0) = 0$: sans page imprimée, il n'y a rien à payer. Avec 5 € de frais fixes, la fonction deviendrait $0{,}06n + 5$, affine mais plus linéaire, et $f(0)$ vaudrait 5 €.

Contrôle : $0{,}06 \times 600 = 36$ €. Réponses : $f(n) = 0{,}06n$; 27 **€** ; 600 **pages** ; oui, $f(0) = 0$.

Réponse. a) $f(n) = 0{,}06n$ · b) 27 € · c) 600 pages · d) oui, et $f(0) = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).