

Plaquette 2 – Fonctions linéaires et proportionnalité

Fonctions linéaires et affines – Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. f est linéaire s'il existe un nombre a tel que $f(x) = ax$ pour tout x . Le nombre a est le **coefficient**.

Propriété	Écriture
image de 0	$f(0) = 0$
coefficient à partir d'une image	$a = \frac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$
doubler l'antécédent	$f(2x) = 2f(x)$
somme	$f(x + y) = f(x) + f(y)$

Représentation graphique. Une droite **passant par l'origine**. Le coefficient a se lit comme une pente : en avançant de 1, on monte de a .

Reconnaître une fonction linéaire.

Écriture	Linéaire ?
$f(x) = 5x$	oui, $a = 5$
$f(x) = \frac{x}{4}$	oui, $a = 0,25$
$f(x) = 3x - 2$	non, elle est affine
$f(x) = x^2$	non
$f(x) = 0$	oui, $a = 0$

Lien avec la proportionnalité. Un tableau de proportionnalité de coefficient a est exactement la table de valeurs de $f(x) = ax$. Pour tester la proportionnalité, on vérifie que tous les quotients $\frac{f(x)}{x}$ sont égaux.

Chercher un antécédent. On résout $ax = k$, ce qui donne $x = \frac{k}{a}$ si $a \neq 0$.

Attention à l'aire. Si les longueurs sont multipliées par k , les aires le sont par k^2 : la relation entre les aires n'est pas la même fonction linéaire que celle entre les longueurs.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une fonction linéaire

- **Critère** : l'écriture doit être de la forme ax ✓
- **Test de f** : $a = 5$ ✓
- **Verdict** : **linéaire** ✓
- **Test de g** : il y a un terme constant -2 ✓
- **Verdict** : **non** linéaire, elle est affine ✓
- **Contrôle** : $g(0) = -2 \neq 0$ ✓
- **Test de h** : diviser par 4 revient à multiplier par 0,25 ✓
- **Réécriture** : $h(x) = 0,25x$ ✓

- **Verdict : linéaire**, de coefficient 0,25 ✓
- **Test de k** : la variable est au carré ✓
- **Verdict : non linéaire** ✓
- **Contrôle** : $k(1) = 1$ et $k(2) = 4$ ✓
- **Quotients** : 1 puis 2, différents ✓
- **Test de m** : $a = -7$ ✓
- **Verdict : linéaire** ✓
- **Bilan** :

f, h et m sont linéaires

- **Test rapide** : une fonction linéaire vérifie toujours $f(0) = 0$ ✓
- **Réciproque fausse** : $k(0) = 0$ pourtant k n'est pas linéaire ✓

Réponse. f ($a = 5$), h ($a = 0,25$) et m ($a = -7$) sont linéaires.

Correction de l'exercice 2 - Déterminer le coefficient

a) **Formule** : $a = \frac{f(4)}{4}$ ✓

- **Calcul** : $\frac{10}{4}$ ✓
- **Coefficient** : 2,5 ✓
- **Expression** :

$$f(x) = 2,5x$$

- **Contrôle** : $2,5 \times 4 = 10$ ✓

b) **Calcul de $f(6)$** : $2,5 \times 6$ ✓

- **Résultat** :

$$15$$

- **Contrôle par proportionnalité** : $6 = 1,5 \times 4$ ✓
- **Donc** : $f(6) = 1,5 \times 10 = 15$ ✓
- **Concordance** ✓

c) **Équation** : $2,5x = 40$ ✓

- **On divise par 2,5** :

$$x = 16$$

- **Vérification** : $2,5 \times 16 = 40$ ✓
- **Contrôle par proportionnalité** : $40 = 4 \times 10$ ✓
- **Donc l'antécédent vaut** : $4 \times 4 = 16$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Image de 1** : 2,5 ✓
- **Image de 0** : 0 ✓
- **Image de -4** : -10 ✓
- **Remarque** : deux antécédents opposés ont des images opposées ✓

Réponse. a) $f(x) = 2,5x$ · b) $f(6) = 15$ · c) l'antécédent de 40 est 16.

Correction de l'exercice 3 - Coefficient négatif

- **Calcul de $f(2)$** : -3×2 ✓
- **Résultat** : -6 ✓

- **Calcul de $f(-5)$** : $-3 \times (-5) \checkmark$
- **Règle des signes** : deux négatifs donnent un positif $\checkmark$
- **Résultat** : 15 $\checkmark$
- **Antécédent de 21** : on résout $-3x = 21 \checkmark$
- **On divise par -3** :

$$x = -7$$

- **Vérification** : $-3 \times (-7) = 21 \checkmark$
- **Sens de variation** : décroissante, car $a < 0 \checkmark$
- **Contrôle** : $f(0) = 0$ et $f(1) = -3 \checkmark$
- **Confirmation** : quand x augmente, $f(x)$ diminue $\checkmark$
- **Représentation graphique** : une droite passant par l'origine $\checkmark$
- **Second point utile** : $(1 ; -3) \checkmark$
- **Orientation** : la droite descend de gauche à droite $\checkmark$
- **Images positives** : pour $x < 0 \checkmark$
- **Images négatives** : pour $x > 0 \checkmark$
- **Contrôle** : $f(-2) = 6 > 0 \checkmark$

Réponse. $f(2) = -6 \cdot f(-5) = 15 \cdot$ l'antécédent de 21 est -7 .

Correction de l'exercice 4 - Un tableau de proportionnalité

- **Fonction associée** : $f(x) = 3,5x \checkmark$
- **Calcul pour $x = 2$** : 7 $\checkmark$
- **Calcul pour $x = 5$** : 17,5 $\checkmark$
- **Calcul pour $x = 8$** : 28 $\checkmark$
- **Calcul pour $x = 12$** : 42 $\checkmark$
- **Tableau complété** $\checkmark$

x	2	5	8	12
y	7	17,5	28	42

- **Expression** :

$$y = 3,5x$$

- **Contrôle des quotients** : $\frac{7}{2} = 3,5 \checkmark$
- **Et** : $\frac{17,5}{5} = 3,5 \checkmark$
- **Et** : $\frac{28}{8} = 3,5 \checkmark$
- **Et** : $\frac{42}{12} = 3,5 \checkmark$
- **Tous égaux** : la proportionnalité est confirmée $\checkmark$
- **Passage de $x = 2$ à $x = 8$** : on multiplie par 4 $\checkmark$
- **Effet sur y** : $7 \times 4 = 28 \checkmark$
- **Cohérence** $\checkmark$
- **Antécédent de 63** : $\frac{63}{3,5} = 18 \checkmark$
- **Contrôle** : $3,5 \times 18 = 63 \checkmark$

Réponse. $7 \cdot 17,5 \cdot 28 \cdot 42$; et $y = 3,5x$.

Correction de l'exercice 5 - Représenter graphiquement

a) **Premier point** : toute droite linéaire passe par l'origine ✓

— **Point** : $(0; 0)$ ✓

— **Deuxième point** : $f(2) = 3$ ✓

— **Point** : $(2; 3)$ ✓

— **Troisième point** : $f(4) = 6$ ✓

— **Point** :

$(4; 6)$

b) **Lecture de la pente** : on part d'un point de la droite ✓

— **On avance de 1 vers la droite** ✓

— **On monte de** : 1,5 ✓

— **Autre lecture pratique** : avancer de 2, monter de 3 ✓

— **Avantage** : on reste sur des nœuds du quadrillage ✓

c) **Test de A** : $f(10) = 15$ ✓

— **Comparaison** : $15 = 15$ ✓

— **Verdict** : A appartient à la droite ✓

— **Test de B** : $f(6) = 9$ ✓

— **Comparaison** : $9 \neq 10$ ✓

— **Verdict** : B n'appartient pas à la droite ✓

— **Point réel d'abscisse 6** : $(6; 9)$ ✓

— **Contrôle du quotient pour A** : $\frac{15}{10} = 1,5$ ✓

— **Contrôle du quotient pour B** : $\frac{10}{6} \approx 1,67$ ✓

— **Conclusion** : seul A donne le bon quotient ✓

Réponse. a) $(0; 0)$, $(2; 3)$, $(4; 6)$ · b) en avançant de 2, on monte de 3 · c) A oui, B non.

Correction de l'exercice 6 - Lire un coefficient sur un graphique

a) **Passage par l'origine** : la fonction est linéaire ✓

— **Coefficient** : $\frac{10}{4}$ ✓

— **Valeur** : 2,5 ✓

— **Expression** :

$$f(x) = 2,5x$$

b) **Calcul de $f(7)$** : $2,5 \times 7$ ✓

— **Ordonnée** :

17,5

— **Point correspondant** : $(7; 17,5)$ ✓

c) **Équation** : $2,5x = -5$ ✓

— **On divise par 2,5** :

$$x = -2$$

— **Point correspondant** : $(-2; -5)$ ✓

— **Vérification** : $2,5 \times (-2) = -5$ ✓

- **Position du point** : dans le troisième quadrant ✓
- **Explication** : abscisse et ordonnée sont toutes deux négatives ✓
- **Sens de variation** : croissante, car $a > 0$ ✓
- **Contrôle** : $f(-2) = -5 < f(0) = 0 < f(7) = 17,5$ ✓
- **Symétrie** : la droite passe aussi par $(-4; -10)$ ✓
- **Contrôle** : $2,5 \times (-4) = -10$ ✓
- **Propriété générale** : une droite passant par l'origine est symétrique par rapport à celle-ci ✓

Réponse. a) $f(x) = 2,5x$ · b) $17,5$ · c) -2 .

Correction de l'exercice 7 - Un agrandissement

a) **Fonction des longueurs** : $f(x) = 2,5x$ ✓

- **Calcul de $f(6)$** : $2,5 \times 6$ ✓
- **Nouvelle longueur** :

15 cm

b) **Traduction** : on cherche l'antécédent de 15 ✓

- **Équation** : $2,5x = 15$ ✓
- **Longueur initiale** :

6 cm

- **Contrôle** : c'est bien le segment de a) ✓

c) **Réponse** : non ✓

- **Argument** : l'aire dépend de deux dimensions ✓
- **Chacune est multipliée par 2,5** ✓
- **Coefficient pour les aires** : $2,5^2$ ✓
- **Valeur** :

6,25

- **Exemple avec un carré de 4 cm** : aire 16 cm^2 ✓
- **Après agrandissement** : côté 10 cm ✓
- **Nouvelle aire** : 100 cm^2 ✓
- **Rapport** : $\frac{100}{16} = 6,25$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Coefficient pour les volumes** : $2,5^3 = 15,625$ ✓
- **Exemple avec un cube de 4 cm** : volume 64 cm^3 ✓
- **Après agrandissement** : 1000 cm^3 ✓
- **Rapport** : $\frac{1000}{64} = 15,625$ ✓

Réponse. a) 15 cm · b) 6 cm · c) non : l'aire est multipliée par 6,25.

Correction de l'exercice 8 - Convertir des miles

a) **Situation de proportionnalité** ✓

- **Coefficient** : 1,609 ✓
- **Fonction** :

$$f(x) = 1,609x$$

b) **Calcul de $f(5)$** : $1,609 \times 5$ ✓

— **Résultat** :

8,045 km

— **Arrondi** : environ 8 km ✓

c) **Traduction** : on cherche l'antécédent de 100 ✓

— **Équation** : $1,609x = 100$ ✓

— **On divise par 1,609** : $x = \frac{100}{1,609}$ ✓

— **Valeur approchée** :

$\approx 62,2$ miles

— **Vérification** : $1,609 \times 62,2 \approx 100,08$ km ✓

— **Ordre de grandeur** : un mile vaut un peu plus de 1,5 km ✓

— **Contrôle mental** : $100 \div 1,6 = 62,5$ ✓

— **Cohérence** ✓

— **Conversion de 26,2 miles** : $\approx 42,2$ km ✓

— **Interprétation** : c'est la distance du marathon ✓

— **Conversion de 1 km** : $\approx 0,62$ mile ✓

— **Coefficient inverse** : $\frac{1}{1,609} \approx 0,6215$ ✓

— **Remarque** : les deux conversions sont deux fonctions linéaires inverses l'une de l'autre ✓

Réponse. a) $f(x) = 1,609x$ · b) 8,045 km · c) environ 62,2 miles.

Correction de l'exercice 9 – Une vitesse constante

a) **Situation de proportionnalité** ✓

— **Fonction** :

$$d(t) = 72t$$

b) **Durée en heures** : 2,5 ✓

— **Calcul de $d(2,5)$** : $72 \times 2,5$ ✓

— **Distance** :

180 km

— **Contrôle** : $72 \times 2 = 144$ plus 36 ✓

— **Total** : 180 km ✓

c) **Équation** : $72t = 288$ ✓

— **On divise par 72** :

$t = 4$ heures

— **Vérification** : $72 \times 4 = 288$ km ✓

— **Distance en 1 min** : $\frac{72}{60} = 1,2$ km ✓

— **Distance en 10 min** : 12 km ✓

— **Distance en 45 min** : 54 km ✓

— **Contrôle** : $0,75 \times 72 = 54$ ✓

— **Vitesse en m/s** : $\frac{72\,000}{3600} = 20$ m/s ✓

— **Contrôle** : diviser par 3,6 donne bien 20 ✓

— **Distance en 1 s** : 20 m ✓

Réponse. a) $d(t) = 72t$ · b) 180 km · c) 4 heures.

Correction de l'exercice 10 - Un prix au kilo

a) **Prix au kilo** : $\frac{7,35}{3}$ ✓

— **Calcul** : 2,45 € ✓

— **Fonction** :

$$f(m) = 2,45m$$

— **Contrôle** : $2,45 \times 3 = 7,35$ € ✓

b) **Calcul de $f(5)$** : $2,45 \times 5$ ✓

— **Prix** :

$$12,25 \text{ €}$$

c) **Équation** : $2,45m = 19,6$ ✓

— **On divise par 2,45** :

$$m = 8 \text{ kg}$$

— **Vérification** : $2,45 \times 8 = 19,60$ € ✓

— **Contrôle par proportionnalité** : $19,60 = 7,35 \times \frac{8}{3}$ ✓

— **Calcul** : $7,35 \times \frac{8}{3} = 19,60$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Prix de 500 g** : 1,225 €, soit environ 1,23 € ✓

— **Prix de 10 kg** : 24,50 € ✓

— **Contrôle** : c'est le double du prix de 5 kg ✓

— **Masse pour 10 €** : $\frac{10}{2,45} \approx 4,08$ kg ✓

— **Interprétation** : un peu plus de 4 kg ✓

Réponse. a) 2,45 €/kg et $f(m) = 2,45m$ · b) 12,25 € · c) 8 kg.

Correction de l'exercice 11 - Comparer deux fonctions linéaires

— **Différence** : $g(x) - f(x)$ ✓

— **Calcul** : $6x - 4x$ ✓

— **Résultat** : $2x$ ✓

— **Signe de la différence** : celui de x ✓

— **Cas $x > 0$** : la différence est positive ✓

— **Conclusion** :

$$g(x) > f(x)$$

— **Contrôle avec $x = 3$** : $f(3) = 12$ et $g(3) = 18$ ✓

— **Cas $x = 0$** : la différence est nulle ✓

— **Conclusion** : $f(0) = g(0) = 0$ ✓

— **Interprétation graphique** : les deux droites se croisent à l'origine ✓

— **Cas $x < 0$** : la différence est négative ✓

— **Conclusion** :

$$g(x) < f(x)$$

- **Contrôle avec** $x = -3$: $f(-3) = -12$ et $g(-3) = -18$ ✓
- **Comparaison** : $-18 < -12$ ✓
- **Piège** : croire que le plus grand coefficient donne toujours la plus grande image ✓
- **Réalité** : c'est vrai seulement pour $x > 0$ ✓
- **Lecture graphique** : la droite de g est plus « pentue » ✓
- **Conséquence** : elle est au-dessus à droite, en dessous à gauche ✓

Réponse. $g(x) > f(x)$ si $x > 0$ · égalité si $x = 0$ · $g(x) < f(x)$ si $x < 0$.

Correction de l'exercice 12 - Doubler l'antécédent

a) **Propriété** : $f(kx) = k \times f(x)$ ✓

- **Passage de 3 à 6** : on multiplie par 2 ✓
- **Image** : 2×8 ✓
- **Résultat** :

$$f(6) = 16$$

- **Passage de 3 à 9** : on multiplie par 3 ✓
- **Image** : 3×8 ✓
- **Résultat** :

$$f(9) = 24$$

b) **Passage de 3 à 1,5** : on divise par 2 ✓

- **Image** : $\frac{8}{2}$ ✓
- **Résultat** :

$$f(1,5) = 4$$

c) **Coefficient** : $a = \frac{8}{3}$ ✓

- **Valeur approchée** : $\approx 2,67$ ✓
- **Expression** :

$$f(x) = \frac{8}{3}x$$

- **Contrôle de $f(6)$** : $\frac{48}{3} = 16$ ✓
- **Contrôle de $f(9)$** : $\frac{72}{3} = 24$ ✓
- **Contrôle de $f(1,5)$** : $\frac{12}{3} = 4$ ✓
- **Concordance des trois valeurs** ✓
- **Image de 1** : $\frac{8}{3}$ ✓
- **Antécédent de 40** : $\frac{40 \times 3}{8} = 15$ ✓
- **Contrôle** : $\frac{8}{3} \times 15 = 40$ ✓
- **Avantage de la propriété** : elle évite les fractions ✓

Réponse. a) 16 et 24 · b) 4 · c) $f(x) = \frac{8}{3}x$.

Correction de l'exercice 13 - Une recette de cuisine

a) **Masse par personne** : $\frac{250}{4}$ ✓

— **Calcul** : 62,5 g ✓

— **Fonction** :

$$f(n) = 62,5n$$

— **Contrôle** : $62,5 \times 4 = 250$ g ✓

b) **Calcul de $f(10)$** : $62,5 \times 10$ ✓

— **Masse** :

$$625 \text{ g}$$

— **Contrôle par proportionnalité** : $10 = 2,5 \times 4$ ✓

— **Donc** : $2,5 \times 250 = 625$ g ✓

— **Concordance** ✓

c) **Équation** : $62,5n = 375$ ✓

— **On divise par 62,5** :

$$n = 6 \text{ personnes}$$

— **Vérification** : $62,5 \times 6 = 375$ g ✓

— **Contrôle par proportionnalité** : $375 = 1,5 \times 250$ ✓

— **Donc** : $1,5 \times 4 = 6$ personnes ✓

— **Concordance** ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : 6 est un entier ✓

— **Masse pour 7 personnes** : 437,5 g ✓

— **Masse pour 12 personnes** : 750 g ✓

— **Contrôle** : c'est le triple de la recette de base ✓

Réponse. a) $f(n) = 62,5n$ · b) 625 g · c) 6 personnes.

Correction de l'exercice 14 - Un change de devises

a) **Situation de proportionnalité** ✓

— **Coefficient** : 1,08 ✓

— **Fonction** :

$$f(x) = 1,08x$$

b) **Calcul de $f(250)$** : $1,08 \times 250$ ✓

— **Montant** :

$$270 \text{ dollars}$$

— **Contrôle** : 250 plus 8 % de 250 ✓

— **Calcul** : $250 + 20 = 270$ ✓

— **Concordance** ✓

c) **Équation** : $1,08x = 540$ ✓

— **On divise par 1,08** :

$$x = 500 \text{ €}$$

— **Vérification** : $1,08 \times 500 = 540$ dollars ✓

- **Coefficient inverse** : $\frac{1}{1,08} \approx 0,9259$ ✓
- **Contrôle** : $540 \times 0,9259 \approx 500$ € ✓
- **Interprétation** : un dollar vaut environ 0,93 € ✓
- **Conversion de 100 €** : 108 dollars ✓
- **Conversion de 100 dollars** : $\approx 92,59$ € ✓
- **Piège** : croire que les deux coefficients sont symétriques ✓
- **Réalité** : 1,08 et 0,9259 ne diffèrent pas de la même quantité de 1 ✓
- **Contrôle** : $1,08 \times 0,9259 \approx 1$ ✓

Réponse. a) $f(x) = 1,08x$ · b) 270 dollars · c) 500 €.

Correction de l'exercice 15 - Proportionnel ou non ?

- **Test des quotients** : $\frac{6}{1} = 6$ ✓
- **Deuxième quotient** : $\frac{9}{2} = 4,5$ ✓
- **Constat** : les quotients diffèrent ✓
- **Conclusion** :
le prix n'est pas proportionnel à la masse
- **Recherche d'une fonction affine** : on teste $f(m) = am + b$ ✓
- **Coefficient directeur** : $\frac{9-6}{2-1}$ ✓
- **Valeur** : $a = 3$ ✓
- **Contrôle sur un autre couple** : $\frac{18-15}{5-4} = 3$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Calcul de b** : $6 = 3 \times 1 + b$ ✓
- **Valeur** : $b = 3$ ✓
- **Fonction proposée** :
$$f(m) = 3m + 3$$
- **Contrôle pour $m = 2$** : $6 + 3 = 9$ € ✓
- **Contrôle pour $m = 4$** : $12 + 3 = 15$ € ✓
- **Contrôle pour $m = 5$** : $15 + 3 = 18$ € ✓
- **Les quatre couples sont vérifiés** ✓
- **Interprétation des 3 € fixes** : frais de dossier ✓
- **Interprétation du coefficient** : 3 € par kilo ✓
- **Prix pour 10 kg** : 33 € ✓

Réponse. Non : le prix suit la fonction affine $f(m) = 3m + 3$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : linéaire de bout en bout

a) **Coût par page** : 0,06 € ✓

— **Fonction** :

$$f(n) = 0,06n$$

— **Nature** : linéaire ✓

b) **Calcul de $f(450)$** : $0,06 \times 450$ ✓

— **Coût** :

27 €

— **Contrôle** : $450 \times 6 = 2700$ centimes ✓

— **Conversion** : 27 € ✓

c) **Équation** : $0,06n = 36$ ✓

— **On divise par 0,06** :

$$n = 600 \text{ pages}$$

— **Vérification** : $0,06 \times 600 = 36$ € ✓

— **Contrôle par proportionnalité** : $36 = \frac{4}{3} \times 27$ ✓

— **Donc** : $\frac{4}{3} \times 450 = 600$ ✓

— **Concordance** ✓

d) **Test de proportionnalité** : $\frac{27}{450} = 0,06$ ✓

— **Et** : $\frac{36}{600} = 0,06$ ✓

— **Quotients égaux** : la proportionnalité est confirmée ✓

— **Valeur de $f(0)$** :

0 €

— **Interprétation** : aucune page imprimée, rien à payer ✓

— **Confirmation** : c'est la marque d'une fonction linéaire ✓

— **Contre-exemple** : avec 5 € de frais fixes, la fonction deviendrait $0,06n + 5$ ✓

— **Nature** : affine, non linéaire ✓

— **Contrôle** : $f(0)$ vaudrait alors 5 € ✓

— **Coût de 1000 pages avec frais** : $60 + 5 = 65$ € ✓

Réponse. a) $f(n) = 0,06n$ · b) 27 € · c) 600 pages · d) oui, et $f(0) = 0$.