Plaquette 2 – Construire et reconnaître une image

Homothéties — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. L'homothétie de centre O et de rapport k non nul associe à M le point M' tel que O, M et M' soient alignés et $OM' = |k| \times OM$.

Signe de k	Position de M'
$k > 0$	du **même côté** de O que M
$k < 0$	de l'**autre côté** de O

Nature de la transformation.

Valeur de k	Effet
$\|k\| > 1$	agrandissement
$\|k\| < 1$	réduction
$k = 1$	identité : rien ne bouge
$k = -1$	symétrie centrale de centre O

Le centre est invariant. L'image de O est O lui-même, quel que soit le rapport.

Propriétés conservées.

Conservé	Non conservé
les angles	les longueurs (sauf si $\|k\| = 1$)
le parallélisme	les aires
l'alignement	les périmètres
les milieux	—

Conséquence essentielle. La figure image est **semblable** à la figure de départ : mêmes formes, mêmes angles, taille différente.

Droites et images. L'image d'une droite est une droite **parallèle** à la première ; l'image d'un segment est un segment parallèle, de longueur multipliée par $|k|$.

Retrouver le rapport. À partir de deux longueurs correspondantes :

$$|k| = \frac{\text{longueur de l'image}}{\text{longueur d'origine}}$$

Le signe se lit sur la position relative des points par rapport au centre.

Correction de l'exercice 1 – Image d'un point

a) Une homothétie de centre O et de rapport k multiplie les distances au centre par $|k|$:

$$OA' = |k| \times OA = 3 \times 2 = 6 \text{ cm}$$

b) Le rapport est positif, donc A' est du même côté de O que A, sur la demi-droite $[OA)$, trois fois plus loin : A est entre O et A'. C'est un agrandissement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Avec le rapport $\frac{1}{2}$: $OA' = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ cm. Le rapport est encore positif, donc A' est sur $[OA]$, à mi-chemin entre O et A : c'est le **milieu** de $[OA]$, et l'homothétie est une réduction.

Réponse. a) 6 cm · b) sur $[OA]$, au-delà de A · c) 1 cm, A' est le milieu de $[OA]$.

Correction de l'exercice 2 – Rapport négatif

a) Les distances au centre sont multipliées par $|k| = 2$:

$$OB' = 2 \times 4{,}5 = 9 \text{ cm}$$

b) Le rapport est négatif : B' est de l'**autre côté** de O par rapport à B, sur la demi-droite opposée à $[OB)$. Le centre O est donc entre B et B'.

c) Comme O est entre les deux points, les distances s'ajoutent :
$BB' = OB + OB' = 4{,}5 + 9 = 13{,}5$ cm.

Piège : soustraire les distances ($9 - 4{,}5 = 4{,}5$ cm) ne serait juste que pour un rapport positif, quand B et B' sont du même côté de O.

Réponse. a) 9 cm · b) de l'autre côté de O · c) $BB' = 13{,}5$ cm.

Correction de l'exercice 3 – Retrouver le rapport

a) Les distances au centre sont multipliées par $|k|$, donc

$$|k| = \frac{OA'}{OA} = \frac{12{,}5}{5} = 2{,}5$$

Les points A et A' sont du même côté de O, donc le rapport est positif : $k = 2{,}5$. C'est un agrandissement.

b) Toutes les longueurs de la figure sont multipliées par 2,5 : $A'B' = 2{,}5 \times 8 = 20$ cm. De plus, $(A'B')$ est parallèle à (AB).

Remarque : si A et A' étaient de part et d'autre de O, on aurait $k = -2{,}5$, mais la longueur $A'B'$ serait la même, car seule la valeur absolue du rapport agit sur les longueurs.

Réponse. a) $k = 2{,}5$ · b) $A'B' = 20$ cm.

Correction de l'exercice 4 – Reconnaître la transformation

On regarde la valeur absolue du rapport (agrandissement si elle dépasse 1, réduction sinon) et son signe (figure retournée de l'autre côté de O s'il est négatif).

a) $k = 4$: $|k| > 1$ et $k > 0$, c'est un **agrandissement** de rapport 4 ; les longueurs sont multipliées par 4 et les aires par $4^2 = 16$.

b) $k = 0{,}25$: $|k| < 1$, c'est une **réduction** ; les longueurs sont divisées par 4 et les aires par 16. C'est l'homothétie qui annule la précédente, puisque $4 \times 0{,}25 = 1$.

c) $k = -1$: les longueurs sont conservées et la figure passe de l'autre côté de O ; O est le milieu de chaque segment $[MM']$, c'est la **symétrie centrale** de centre O.

d) $k = 1$: chaque point est sa propre image, c'est l'**identité**.

$$k = -1 : \text{symétrie centrale} \qquad k = 1 : \text{identité}$$

Réponse. a) agrandissement · b) réduction · c) symétrie centrale · d) identité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Longueurs d’une figure image

a) Une homothétie de rapport 1,5 multiplie toutes les longueurs par 1,5 : les côtés de l’image mesurent $6 \times 1{,}5 = 9$ cm, $8 \times 1{,}5 = 12$ cm et $10 \times 1{,}5 = 15$ cm.

b) Le périmètre passe de $6 + 8 + 10 = 24$ cm à $9 + 12 + 15 = 36$ cm, et $\frac{36}{24} = 1{,}5$: le périmètre est multiplié par le même rapport que les longueurs.

c) Le triangle ABC est rectangle en B, car $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$ (réciproque du théorème de Pythagore). Une homothétie conserve les angles, donc l’image est aussi rectangle. On le vérifie :

$$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$$

Réponse. a) 9, 12 et 15 cm · b) 24 cm et 36 cm · c) oui, les angles sont conservés.

Correction de l’exercice 6 – Deux homothéties successives

a) Enchaîner deux homothéties de même centre revient à appliquer une seule homothétie de ce centre, dont le rapport est le **produit** des rapports :

$$3 \times 0{,}5 = 1{,}5$$

C’est un agrandissement.

b) Un segment de 4 cm devient $4 \times 1{,}5 = 6$ cm. On le vérifie étape par étape : $4 \times 3 = 12$ cm, puis $12 \times 0{,}5 = 6$ cm.

c) Pour revenir à la figure de départ, il faut un rapport k tel que $1{,}5 \times k = 1$, donc $k = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$: c’est une réduction. Contrôle : $6 \times \frac{2}{3} = 4$ cm. L’ordre des deux homothéties ne change rien, car $0{,}5 \times 3 = 3 \times 0{,}5$.

Réponse. a) 1,5 · b) 6 cm · c) l’homothétie de rapport $\frac{2}{3}$.

Correction de l’exercice 7 – Centre sur la figure

a) Le centre d’une homothétie est sa propre image : l’image de A est A lui-même.

b) L’image B' de B est sur la demi-droite $[AB)$, avec $AB' = 2 \times AB$: B est le milieu de $[AB']$. De même, C' est sur $[AC)$ avec $AC' = 2 \times AC$, et C est le milieu de $[AC']$.

c) Les longueurs sont multipliées par 2 :

$$B'C' = 2 \times 7 = 14 \text{ cm}$$

On retrouve le théorème des milieux dans le triangle $AB'C'$: (BC) est parallèle à $(B'C')$ et BC en mesure la moitié. L’aire du triangle image est $2^2 = 4$ fois celle de ABC.

Réponse. a) A lui-même · b) sur $[AB)$ et $[AC)$, deux fois plus loin · c) $B'C' = 14$ cm.

Correction de l’exercice 8 – Retrouver le centre

Le rapport vaut 2, donc $OA' = 2 \times OA$. Comme A est entre O et A', les distances s’ajoutent : $OA' = OA + AA'$. En remplaçant :

$$2 \times OA = OA + 9$$

On retranche OA aux deux membres : $OA = 9$ cm, puis $OA' = 2 \times 9 = 18$ cm.

Contrôle : $OA' - OA = 18 - 9 = 9$ cm, c’est bien AA'. Le centre O est sur la droite (AA'), à 9 cm de A, du côté opposé à A'. Avec un rapport -2, O serait entre A et A' et l’on aurait $OA + 2 \times OA = 9$, soit $OA = 3$ cm : le signe change complètement la construction.

Réponse. $OA = 9$ cm (et $OA' = 18$ cm).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 9 – Parallélisme conservé

a) Une homothétie conserve les angles : les quatre angles droits du rectangle restent droits, donc l’image est un **rectangle**, de même forme que le rectangle initial.

b) L’image d’une droite par une homothétie est une droite parallèle : chaque côté de l’image est **parallèle** au côté correspondant, même si le rapport est négatif. Le signe retourne la figure de l’autre côté du centre, sans changer les directions.

c) Les longueurs sont multipliées par $|k| = 0{,}5$:

$$A'B' = 0{,}5 \times 12 = 6 \text{ cm}$$

Les aires sont multipliées par $(-0{,}5)^2 = 0{,}25$: le carré efface le signe.

Réponse. a) oui · b) oui · c) $A'B' = 6$ cm.

Correction de l’exercice 10 – Homothétie ou non ?

Une homothétie multiplie **toutes** les longueurs par le même nombre et conserve les angles.

a) Un carré reste un carré, et ses côtés sont tous multipliés par $\frac{10}{4} = 2{,}5$: **oui**, c’est possible.

b) Les longueurs sont multipliées par $\frac{8}{5} = 1{,}6$ et les largeurs par $\frac{6}{3} = 2$. Comme $1{,}6 \neq 2$, la figure est déformée : **non**.

c) Les trois angles d’un triangle équilatéral mesurent 60°, alors qu’un triangle isocèle non équilatéral n’a pas trois angles égaux. Les angles ont changé : **non**.

d) Un cercle reste un cercle et le rayon est multiplié par $\frac{7}{2} = 3{,}5$: **oui**, c’est possible. L’aire est alors multipliée par

$$3{,}5^2 = 12{,}25$$

Réponse. a) oui · b) non · c) non · d) oui.

Correction de l’exercice 11 – Image d’un cercle

a) Les longueurs sont multipliées par $|k| = 3$: l’image est un cercle de rayon $3 \times 5 = 15$ cm.

b) Le centre du cercle image est l’image I' de I. Sa distance à O vaut $OI' = 3 \times 4 = 12$ cm. Le rapport est négatif, donc I' est de l’autre côté de O par rapport à I :

$$I' \text{ est à 12 cm de } O, \text{ à l'opposé de } I$$

Les deux centres sont alors distants de $II' = 4 + 12 = 16$ cm. Comme cette distance est inférieure à la somme des rayons ($5 + 15 = 20$ cm), les deux cercles se coupent. L’aire du disque est multipliée par $(-3)^2 = 9$.

Réponse. a) 15 cm · b) à 12 cm de O, du côté opposé à I.

Correction de l’exercice 12 – Une réduction successive

a) Chaque réduction divise la largeur par 2 : 80 cm, puis 40 cm, puis 20 cm, puis 10 cm. La largeur finale vaut 10 cm.

b) Les rapports se multiplient :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $80 \times 0{,}125 = 10$ cm.

c) On continue de diviser par 2 : 5 cm après 4 réductions, 2,5 cm après 5, 1,25 cm après 6, 0,625 cm après 7. Il faut donc 7 **réductions** pour descendre sous 1 cm ; le rapport global vaut alors $\frac{1}{128}$.

Réponse. a) 10 cm · b) $\frac{1}{8}$ · c) 7 réductions.

Correction de l’exercice 13 – Deux figures semblables

a) Deux triangles sont semblables quand les longueurs de l’un s’obtiennent en multipliant celles de l’autre par un même nombre. On compare les côtés rangés dans le même ordre :

$$\frac{10}{4} = 2{,}5 \qquad \frac{15}{6} = 2{,}5 \qquad \frac{20}{8} = 2{,}5$$

Les trois rapports sont égaux : les triangles sont semblables.

b) Le rapport d’agrandissement vaut $k = 2{,}5$.

c) Les périmètres valent $4 + 6 + 8 = 18$ et $10 + 15 + 20 = 45$, et $\frac{45}{18} = 2{,}5$: ils sont dans le rapport k. Les aires, elles, sont dans le rapport $k^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$: le grand triangle a une aire plus de six fois plus grande.

Réponse. a) les trois rapports valent 2,5 · b) $k = 2{,}5$ · c) périmètres ×2,5, aires ×6,25.

Correction de l’exercice 14 – Un drapeau agrandi

a) Le rapport d’agrandissement est le quotient des longueurs :

$$k = \frac{150}{90} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$$

b) Toutes les longueurs sont multipliées par $\frac{5}{3}$, donc la largeur vaut $60 \times \frac{5}{3} = 100$ cm. Contrôle : $\frac{100}{60} = \frac{5}{3}$, le drapeau n’est pas déformé.

c) L’aire de tissu est multipliée par $k^2 = \frac{25}{9} \approx 2{,}78$. On le vérifie directement : l’aire passe de $90 \times 60 = 5400$ cm² à $150 \times 100 = 15\,000$ cm², et $\frac{15\,000}{5400} \approx 2{,}78$. Il faut donc presque trois fois plus de tissu, alors que les longueurs ne sont multipliées que par 1,67.

Réponse. a) $k = \frac{5}{3}$ · b) 100 cm · c) l’aire est multipliée par $\frac{25}{9} \approx 2{,}78$.

Correction de l’exercice 15 – Repérer une erreur

L’élève se trompe : une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, mais les **aires par** k^2. Ici :

$$\text{l'aire est multipliée par } 3^2 = 9$$

Exemple : un carré de 2 cm de côté a une aire de 4 cm². Son image a un côté de 6 cm, donc une aire de 36 cm², et $\frac{36}{4} = 9$.

Explication : une aire se calcule en multipliant deux longueurs, et chacune est multipliée par 3, d’où $3 \times 3 = 9$. De la même façon, un volume fait intervenir trois longueurs et serait multiplié par $3^3 = 27$, tandis que le périmètre, qui est une longueur, est simplement multiplié par 3.

Réponse. L’aire est multipliée par $k^2 = 9$, pas par 3.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : une figure complète

a) La valeur absolue du rapport vaut $\frac{4}{3} > 1$: c’est un **agrandissement**. Le rapport est négatif : la figure image est aussi **retournée**, de l’autre côté du centre O.

b) Le périmètre est une longueur, il est multiplié par $|k| = \frac{4}{3}$: $27 \times \frac{4}{3} = 9 \times 4 = 36$ cm.

c) L’aire est multipliée par $k^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, le carré effaçant le signe :

$$18 \times \frac{16}{9} = 2 \times 16 = 32 \text{ cm}^2$$

d) $OA' = \frac{4}{3} \times 6 = 8$ cm, et comme $k < 0$, A' est de l’autre côté de O : il est à 8 cm de O, à l’opposé de A, et $AA' = 6 + 8 = 14$ cm.

Réponse. a) agrandissement avec retournement · b) 36 cm · c) 32 cm² · d) à 8 cm de O, à l’opposé de A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).