Plaquette 5 – Échelles, maquettes et problèmes de similitude

Homothéties — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Échelle. Elle compare le dessin à la réalité, dans la même unité :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}$$

Échelle	Signification
$\frac{1}{100}$	1 cm sur le plan pour 100 cm en réalité
$\frac{1}{25\,000}$	1 cm pour 250 m
2	le dessin est deux fois plus grand que l'objet

Convertir avant de calculer. Toutes les longueurs doivent être dans la même unité.

Égalité	Valeur
1 m	100 cm
1 km	100 000 cm
1 m²	10 000 cm²
1 m³	1000 L

Les trois exposants, encore.

Grandeur	Coefficient
longueur, périmètre, rayon	k
aire, surface à peindre	k^2
volume, contenance, masse à matière égale	k^3

Zoom d'un appareil photo. Un zoom ×3 multiplie les longueurs de l'image par 3 et les aires par 9.

Formats de papier. Passer d'un format A au suivant multiplie les longueurs par $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ et l'aire par 2.

Contrôle de vraisemblance. Une maquette au $\frac{1}{100}$ d'un immeuble de 30 m mesure 30 cm : plausible. Si le calcul donne 3 m ou 3 cm, on a manqué une puissance de 10.

Correction de l'exercice 1 – Une maquette d'immeuble

L'échelle $\frac{1}{200}$ divise les longueurs par 200, les aires par $200^2 = 40\,000$.

a) 36 m = 3600 cm, donc la maquette mesure $3600 \div 200 = 18$ cm de haut.

b) 1,6 m = 160 cm, donc la fenêtre mesure $160 \div 200 = 0{,}8$ cm, soit 8 mm.

c) 400 m² = 4 000 000 cm², donc la façade occupe

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$4\,000\,000 \div 40\,000 = 100 \text{ cm}^2$$

Contrôle : une façade carrée de 20 m sur 20 m devient un carré de 10 cm sur 10 cm, d'aire 100 cm².

Réponse. a) 18 cm · b) 0,8 cm · c) 100 cm².

Correction de l'exercice 2 – Un plan de maison

a) À l'échelle $\frac{1}{50}$, les longueurs réelles sont 50 fois plus grandes : $9 \times 50 = 450$ cm = 4,5 m et $7 \times 50 = 350$ cm = 3,5 m.

b) L'aire réelle vaut

$$4{,}5 \times 3{,}5 = 15{,}75 \text{ m}^2$$

Contrôle par le rapport des aires : sur le plan, $9 \times 7 = 63$ cm², multipliés par $50^2 = 2500$, donnent 157 500 cm², soit 15,75 m².

c) Le carrelage coûte $15{,}75 \times 32 = 504$ €. En prévoyant 10 % de chutes, il faudrait acheter 17,325 m², soit 554,40 €.

Réponse. a) 4,5 m sur 3,5 m · b) 15,75 m² · c) 504 €.

Correction de l'exercice 3 – Une photo agrandie

a) On compare les deux dimensions : $\frac{26}{13} = 2$ et $\frac{18}{9} = 2$. Le même rapport s'applique aux deux, l'agrandissement est fidèle et $k = 2$.

b) L'aire est multipliée par $k^2 = 4$. Contrôle :

$$\frac{18 \times 26}{9 \times 13} = \frac{468}{117} = 4$$

c) Si le prix est proportionnel à la surface, le grand tirage coûte $4 \times 0{,}15 = 0{,}60$ €.

Piège : multiplier le prix par 2 (le rapport des longueurs) donnerait 0,30 €, alors que la surface de papier a quadruplé.

Réponse. a) $k = 2$ · b) 4 · c) 0,60 €.

Correction de l'exercice 4 – Un modèle réduit de voiture

a) 4,32 m = 432 cm, et à l'échelle $\frac{1}{18}$ le modèle mesure $432 \div 18 = 24$ cm.

b) À matériaux identiques, la masse suit le volume, divisé par $18^3 = 5832$:

$$1400 \div 5832 \approx 0{,}24 \text{ kg}$$

soit environ 240 g.

c) Le résultat est plausible pour un modèle en métal, mais le calcul suppose une voiture pleine, faite de la même matière partout. Une vraie voiture contient beaucoup de vide (habitacle, coffre) et des matériaux variés : le modèle « masse proportionnelle au volume » ne donne qu'un ordre de grandeur.

Réponse. a) 24 cm · b) environ 240 g · c) plausible, mais une vraie voiture est creuse.

Correction de l'exercice 5 – Deux terrains semblables

a) L'aire du premier terrain vaut $30 \times 20 = 600$ m².

b) Le rapport des aires vaut $\frac{2400}{600} = 4$. C'est le carré du rapport des longueurs : $k^2 = 4$,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

donc $k = 2$.

c) Les dimensions du second terrain sont doublées : 60 m sur 40 m. Contrôle :

$$60 \times 40 = 2400 \text{ m}^2$$

Conséquence pratique : le périmètre double (de 100 m à 200 m), donc la clôture coûte deux fois plus ; la surface quadruple, donc le gazon coûte quatre fois plus.

Réponse. a) 600 m² · b) $k = 2$ · c) 60 m sur 40 m.

Correction de l’exercice 6 – Un zoom photographique

a) Le zoom ×4 agit comme un agrandissement de rapport 4 : l’objet apparaît 4 fois plus grand sur l’image. S’il occupait 5 mm en mode normal, il en occupe 20 au zoom.

b) Les surfaces sont multipliées par $4^2 = 16$.

c) Le carré de 6 mm de côté a une aire de 36 mm² ; au zoom, elle devient

$$16 \times 36 = 576 \text{ mm}^2$$

Contrôle par le côté : $4 \times 6 = 24$ mm, et $24^2 = 576$ mm². Inversement, le champ visible est divisé par 16 en surface.

Réponse. a) 4 fois plus grande · b) 16 · c) 576 mm².

Correction de l’exercice 7 – Les formats de papier

a) L’aire est multipliée par 2 et les formats sont semblables, donc $k^2 = 2$ et

$$k = \sqrt{2} \approx 1{,}414$$

b) On multiplie les dimensions de la A4 par $\sqrt{2}$: $21 \times 1{,}414 \approx 29{,}7$ cm et $29{,}7 \times 1{,}414 \approx 42$ cm. La A3 mesure 29,7 cm sur 42 cm : la longueur de la A4 devient la largeur de la A3. Contrôle : $29{,}7 \times 42 = 1247{,}4$ cm², le double de $21 \times 29{,}7 = 623{,}7$ cm².

c) De A4 à A2, on fait deux sauts : le rapport des longueurs vaut $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, et celui des aires 4. La A2 mesure 42 cm sur 59,4 cm.

Réponse. a) $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ · b) 29,7 cm sur 42 cm · c) rapport 2 pour les longueurs.

Correction de l’exercice 8 – Un réservoir réduit

a) Le modèle est une réduction de rapport $\frac{1}{4}$: le volume est divisé par $4^3 = 64$.

$$2000 \div 64 = 31{,}25 \text{ L}$$

b) La tôle couvre une surface, divisée par $4^2 = 16$: il faut $\frac{1}{16}$ de la tôle, soit 6,25 %. Si le grand réservoir demande 8 m² de tôle, le modèle en demande 0,5 m².

Remarque : le modèle contient 64 fois moins mais utilise seulement 16 fois moins de tôle ; proportionnellement à ce qu’il contient, il en consomme 4 fois plus. C’est pourquoi les grandes citernes sont plus économiques.

Réponse. a) 31,25 L · b) $\frac{1}{16}$, soit 6,25 %.

Correction de l’exercice 9 – Deux bougies semblables

a) Les bougies sont semblables, le rapport est celui des hauteurs : $k = \frac{18}{12} = 1{,}5$.

b) Les volumes sont multipliés par k^3 :

$$1{,}5^3 = 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 = 3{,}375$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Si la cire brûle au même rythme (même volume par heure), la durée est proportionnelle au volume : $3{,}375 \times 3 = 10{,}125$ h. Comme $0{,}125$ h $= 0{,}125 \times 60 = 7{,}5$ min, la grande bougie brûle environ 10 h 8 min.

Piège : multiplier la durée par 1,5 donnerait 4,5 h, plus de cinq heures de moins. Dans la réalité, la flamme d'une grande bougie est souvent plus large et consomme plus vite : le modèle donne un ordre de grandeur.

Réponse. a) $k = 1{,}5$ · b) 3,375 · c) environ 10 h 8 min.

Correction de l'exercice 10 – Une carte au 1/25 000

À l'échelle $\frac{1}{25\,000}$, 1 cm sur la carte représente 25 000 cm, soit 250 m.

a) Un carré de 1 cm de côté sur la carte représente donc un carré de 250 m de côté, c'est-à-dire $250 \times 250 = 62\,500$ m². Le lac occupe

$$12 \times 62\,500 = 750\,000 \text{ m}^2 = 0{,}75 \text{ km}^2$$

puisque 1 km² = 1 000 000 m². Cela fait 75 hectares.

b) Le sentier mesure $18 \times 250 = 4500$ m, soit 4,5 km. À 4 km/h, il faut un peu plus d'une heure pour le parcourir.

Réponse. a) 0,75 km² · b) 4,5 km.

Correction de l'exercice 11 – Un agrandissement impossible

a) Un agrandissement fidèle multiplie les deux dimensions par le même nombre. Or

$$\frac{20}{10} = 2 \qquad \frac{28}{15} \approx 1{,}87$$

Les rapports sont différents : l'image serait **déformée**, l'agrandissement n'est pas fidèle.

b) Avec une largeur de 20 cm, le rapport vaut 2, donc la longueur fidèle est $2 \times 15 = 30$ cm : le bon format est 20 cm sur 30 cm.

c) Le format demandé n'a que 28 cm de long : il faut agrandir en 20×30, puis rogner 2 cm dans la longueur. On perd $600 - 560 = 40$ cm² d'image, environ 6,7 %.

Réponse. a) non · b) 20 cm sur 30 cm · c) rogner 2 cm dans la longueur.

Correction de l'exercice 12 – Le coût d'un agrandissement

a) 1 m = 100 cm, donc le rapport vaut $k = \frac{100}{40} = 2{,}5$.

b) Dans le même métal, le coût du bronze suit la masse, donc le volume, multiplié par $k^3 = 2{,}5^3 = 15{,}625$:

$$15{,}625 \times 320 = 5000 \text{ €}$$

c) La dorure recouvre la surface, multipliée par $k^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$: elle coûtera $6{,}25 \times 90 = 562{,}50$ €.

Le coût total passe de 410 € à 5562,50 €, soit environ 13,6 fois plus : un multiplicateur compris entre 6,25 et 15,625, puisque le total mélange une surface et un volume.

Réponse. a) $k = 2{,}5$ · b) 5000 € · c) 562,50 €.

Correction de l'exercice 13 – Deux aquariums

a) Le rapport des volumes vaut

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{100}{64} = 1{,}5625$$

b) Ce rapport est le cube du rapport des longueurs : on cherche un nombre k tel que $k \times k \times k = 1{,}5625$. À la calculatrice, par essais : $1{,}16^3 \approx 1{,}561$ et $1{,}17^3 \approx 1{,}602$, donc $k \approx 1{,}16$.

c) L'arête du nouvel aquarium vaut environ $1{,}16 \times 40 \approx 46{,}4$ cm.

Contrôle : $46{,}4^3 \approx 99\,897$ cm³, soit presque 100 L. Le verre, lui, est multiplié par $k^2 \approx 1{,}35$: 35 % de verre en plus pour 56 % d'eau en plus.

Réponse. a) 1,5625 · b) $k \approx 1{,}16$ · c) environ 46,4 cm.

Correction de l'exercice 14 – Repérer une erreur d'échelle

À l'échelle $\frac{1}{50\,000}$, 1 cm sur la carte représente 50 000 cm, soit 500 m. Un carré de 1 cm de côté représente donc un carré de 500 m de côté :

$$1 \text{ cm}^2 \text{ représente } 500 \times 500 = 250\,000 \text{ m}^2 = 0{,}25 \text{ km}^2$$

Alors 2 cm² représentent 0,5 km², et non 1 km² : l'affirmation est **fausse**. Pour représenter 1 km², il faut 4 cm².

L'erreur vient de l'oubli que les aires suivent le **carré** de l'échelle : les longueurs sont multipliées par 50 000, les aires par $50\,000^2$.

Réponse. Faux : 2 cm² représentent 0,5 km². Il en faudrait 4 pour 1 km².

Correction de l'exercice 15 – Comparer trois offres

a) Les gâteaux sont des disques de rayons 10 cm, 12,5 cm et 15 cm. On calcule leur aire, puis le prix d'un centimètre carré :

— $\pi \times 10^2 \approx 314{,}16$ cm², et $16 \div 314{,}16 \approx 0{,}0509$ € ;
— $\pi \times 12{,}5^2 \approx 490{,}87$ cm², et $24 \div 490{,}87 \approx 0{,}0489$ € ;
— $\pi \times 15^2 \approx 706{,}86$ cm², et $36 \div 706{,}86 \approx 0{,}0509$ €.

b) Le gâteau de 25 cm a le prix au centimètre carré le plus bas : c'est le plus avantageux, d'environ 4 %.

Remarque : le premier et le troisième sont à égalité, car leur rapport des diamètres vaut 1,5, celui des aires $1{,}5^2 = 2{,}25$, et

$$\frac{36}{16} = 2{,}25$$

Réponse. a) environ 0,0509, 0,0489 et 0,0509 € · b) celui de 25 cm.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : une piscine et sa maquette

a) À l'échelle $\frac{1}{30}$, on divise les dimensions par 30 : $1200 \div 30 = 40$ cm, $600 \div 30 = 20$ cm et $150 \div 30 = 5$ cm.

b) Le volume réel vaut $12 \times 6 \times 1{,}5 = 108$ m³ ; celui de la maquette $40 \times 20 \times 5 = 4000$ cm³, soit 4 L.

c) La bâche couvre $12 \times 6 = 72$ m² en réalité, et $40 \times 20 = 800$ cm² sur la maquette.

d) Le rapport des longueurs vaut 30. Pour les surfaces, 72 m² = 720 000 cm² et $720\,000 \div 800 = 900 = 30^2$. Pour les volumes, 108 m³ = 108 000 000 cm³ et

$$108\,000\,000 \div 4000 = 27\,000 = 30^3$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On retrouve les trois exposants : k, k^2, k^3.

Réponse. a) $40 \times 20 \times 5$ cm · b) 108 m³ et 4 L · c) 72 m² et 800 cm² · d) 30, 900 et 27 000.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).