Plaquette 4 – Homothéties et configurations de Thalès

Homothéties — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Homothétie et Thalès. Si $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $(MN) \parallel (BC)$, le triangle AMN est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre A et de rapport k, avec

$$|k| = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Le rapport est **positif** si M est sur la demi-droite $[AB)$ (configuration triangle), **négatif** si A est entre M et B (configuration papillon).

Effets d'une homothétie de rapport k.

Grandeur	Effet
longueurs, périmètres	multipliées par $\lvert k\rvert$
aires	multipliées par k^2
angles	conservés
parallélisme, alignement, milieux	conservés

Agrandissement ou réduction. $|k| > 1$: agrandissement ; $|k| < 1$: réduction ; $k = -1$: symétrie centrale.

Retrouver le rapport. À partir de deux longueurs correspondantes : $|k| = \dfrac{\text{longueur image}}{\text{longueur de départ}}$; à partir de deux aires : $k^2 = \dfrac{\text{aire image}}{\text{aire de départ}}$. Le signe se lit sur la position par rapport au centre.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître l'homothétie dans un triangle

a) Les points A, M, B sont alignés, ainsi que A, N, C, et $(MN) \parallel (BC)$: c'est une configuration de Thalès de sommet A. Le triangle AMN est l'image de ABC par l'homothétie de centre A qui envoie B sur M. M est sur la demi-droite $[AB)$, donc le rapport est positif :

$$k = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

b) L'homothétie multiplie les longueurs par 0,4 et envoie $[BC]$ sur $[MN]$: $MN = 0{,}4 \times 7{,}5 = 3$ cm. C'est une réduction, le petit triangle étant dans le grand.

Réponse. a) Centre A, rapport 0,4 ; b) $MN = 3$ cm.

Correction de l'exercice 2 – La configuration papillon

a) Le triangle AMN est l'image de ABC par l'homothétie de centre A qui envoie B sur M. Comme A est **entre** B et M, l'image est de l'autre côté du centre : le rapport est négatif. Sa valeur absolue est $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$, d'où

$$k = -1{,}5$$

b) Les longueurs sont multipliées par $|k| = 1{,}5$: $MN = 1{,}5 \times BC = 1{,}5 \times 5 = 7{,}5$ cm. Le triangle image est un agrandissement « retourné » de l'autre côté de A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) Centre A, rapport $-1{,}5$; b) $MN = 7{,}5$ cm.

Correction de l'exercice 3 – Agrandissement ou réduction ?

On regarde la valeur absolue pour la taille, le signe pour le côté.

— $k = 3$: $|k| > 1$, agrandissement ; $k > 0$, même côté du centre.
— $k = 0{,}5$: $|k| < 1$, réduction ; même côté.
— $k = -2$: $|k| = 2 > 1$, agrandissement ; $k < 0$, de l'autre côté.
— $k = -0{,}25$: $|k| < 1$, réduction ; de l'autre côté.
— $k = -1$: les longueurs ne changent pas ; l'image est de l'autre côté, à la même distance du centre : c'est la **symétrie centrale**.
— $k = 1$: chaque point est sa propre image, rien ne bouge.

Pour $k = -2$, par exemple, un segment de 3 cm devient un segment de $|-2| \times 3 = 6$ cm, situé de l'autre côté du centre.

Réponse. 3 : agrandissement, même côté ; 0,5 : réduction, même côté ; -2 : agrandissement, côté opposé ; $-0{,}25$: réduction, côté opposé ; -1 : symétrie centrale ; 1 : identité.

Correction de l'exercice 4 – Retrouver le rapport

a) La valeur absolue du rapport est le quotient de deux longueurs correspondantes :

$$|k| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{6}{3} = 2$$

A' est sur la demi-droite $[OA)$, donc du même côté du centre : le rapport est positif, $k = 2$.

b) Toutes les longueurs sont multipliées par 2 : $B'C' = 2 \times 2{,}5 = 5$ cm. Les distances au centre aussi : $OC' = 2 \times OC = 8$ cm, avec C' sur la demi-droite $[OC)$.

Réponse. a) $k = 2$; b) $B'C' = 5$ cm et $OC' = 8$ cm.

Correction de l'exercice 5 – Utiliser l'homothétie pour une longueur inconnue

Le triangle AMN est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $k = \frac{AM}{AB}$.
Comme M est sur $[AB]$, $AB = AM + MB = 4 + 6 = 10$ cm, d'où $k = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

Cette homothétie envoie C sur N, donc $AN = 0{,}4 \times AC$. On en déduit

$$AC = \frac{AN}{0{,}4} = \frac{3}{0{,}4} = 7{,}5 \text{ cm}$$

et $NC = AC - AN = 7{,}5 - 3 = 4{,}5$ cm. **Contrôle** : $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{7{,}5} = 0{,}4 = \frac{AM}{AB}$, comme le dit le théorème de Thalès.

Réponse. $AC = 7{,}5$ cm et $NC = 4{,}5$ cm.

Correction de l'exercice 6 – Image d'un point sur une droite

a) Le rapport 3 est positif : A' est sur la demi-droite $[OA)$, avec $OA' = 3 \times 2 = 6$ cm. Comme A est entre O et A', $AA' = 6 - 2 = 4$ cm.

b) Avec le rapport -3, A'' est sur la droite (OA), de l'autre côté de O, avec $OA'' = |-3| \times 2 = 6$ cm. Le point O est entre A et A'', donc $AA'' = 2 + 6 = 8$ cm.

c) A' et A'' sont à la même distance 6 cm de O, de part et d'autre de ce point : O est le milieu de $[A'A'']$. Autrement dit, A'' est le symétrique de A' par rapport à O :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\text{rapport } -3 = \text{rapport } 3 \text{ suivi de la symétrie de centre } O$$

Réponse. a) $OA' = 6$ cm, $AA' = 4$ cm ; b) $OA'' = 6$ cm, $AA'' = 8$ cm ; c) O est le milieu de $[A'A'']$.

Correction de l'exercice 7 – Ce qu'une homothétie conserve

a) **Vrai.** Les longueurs sont multipliées par $|-2| = 2$: $A'B' = 2 \times 3 = 6$ cm.

b) **Faux.** Une homothétie conserve les angles : $A'\hat{B}'C' = 70°$.

c) **Vrai.** Une homothétie conserve le parallélisme : les côtés opposés de l'image sont encore parallèles, donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme, de côtés 6 cm et 4 cm.

d) **Faux.** Les aires sont multipliées par le **carré** du rapport :

$$(-2)^2 = 4$$

L'aire de l'image est le quadruple de celle de $ABCD$, pas le double. On peut le voir sur un carré de côté 1 : son image a pour côté 2 et pour aire 4.

Réponse. a) vrai ; b) faux (70°) ; c) vrai ; d) faux (aire multipliée par 4).

Correction de l'exercice 8 – Périmètre et aire de l'image

a) Le périmètre de départ vaut $3 + 4 + 5 = 12$ cm. Les longueurs étant toutes multipliées par 2,5, le périmètre aussi : $12 \times 2{,}5 = 30$ cm. **Contrôle** : les côtés de l'image mesurent 7,5 ; 10 et 12,5 cm, de somme 30 cm.

b) Le triangle est rectangle (car $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$), ses côtés de l'angle droit mesurent 3 et 4 cm : son aire vaut $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6$ cm². L'aire de l'image est multipliée par le carré du rapport :

$$6 \times 2{,}5^2 = 6 \times 6{,}25 = 37{,}5 \text{ cm}^2$$

Contrôle direct : $\dfrac{7{,}5 \times 10}{2} = 37{,}5$ cm².

Réponse. a) 30 cm ; b) 6 cm² puis 37,5 cm².

Correction de l'exercice 9 – Remonter du rapport des aires

a) Les aires sont multipliées par k^2 :

$$k^2 = \frac{75}{12} = 6{,}25$$

donc $|k| = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$. L'image est de l'autre côté du centre : le rapport est négatif, $k = -2{,}5$.

b) Les longueurs sont multipliées par $|k| = 2{,}5$: le segment image mesure $2{,}5 \times 4 = 10$ cm. Il ne faut pas multiplier par 6,25, qui est le coefficient des aires. **Contrôle** : un carré de côté 4 cm (aire 16) aurait pour image un carré de côté 10 cm (aire $100 = 16 \times 6{,}25$).

Réponse. a) $k = -2{,}5$; b) 10 cm.

Correction de l'exercice 10 – Deux homothéties de même centre

a) La première homothétie multiplie les longueurs par 2 : on obtient un segment de 4 cm. La seconde les multiplie par $|-3| = 3$: le segment final mesure 12 cm, soit 6 fois la longueur de départ.

b) Chaque distance au centre est d'abord multipliée par 2 (même côté), puis par 3 en changeant de côté. Au total, on passe directement de $[AB]$ au segment final par

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

l'homothétie de centre O et de rapport

$$2 \times (-3) = -6$$

c) Non : le rapport final est négatif, le segment final est de l'autre côté de O. Le premier rapport, positif, laisse le segment du même côté ; c'est le second, négatif, qui le fait passer de l'autre côté.

Réponse. a) 12 cm ; b) l'homothétie de centre O et de rapport -6 ; c) non, de l'autre côté.

Correction de l'exercice 11 – Est-ce une homothétie ?

Une homothétie de centre O multiplie **toutes** les distances au centre par le même nombre $|k|$. Il faudrait donc

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$$

Or $\frac{OA'}{OA} = \frac{6}{4} = 1{,}5$ et $\frac{OB'}{OB} = \frac{7}{5} = 1{,}4$. Ces quotients sont différents : aucune homothétie de centre O ne peut envoyer à la fois A sur A' et B sur B'. On en déduit aussi, par la contraposée du théorème de Thalès, que les droites (AB) et $(A'B')$ ne sont pas parallèles. Avec $OB' = 7{,}5$ cm, le quotient vaudrait 1,5 et l'homothétie de rapport 1,5 conviendrait.

Réponse. Non : $\frac{6}{4} = 1{,}5 \neq \frac{7}{5} = 1{,}4$.

Correction de l'exercice 12 – Image d'un cercle

a) Une homothétie transforme un cercle en un cercle. Les longueurs sont multipliées par $|-2| = 2$: le rayon de l'image vaut $2 \times 3 = 6$ cm.

b) Le centre de l'image est l'image I' du centre I : il est sur la droite (OI), de l'autre côté de O, avec $OI' = 2 \times OI$.

c) Le périmètre passe de $2\pi \times 3 = 6\pi$ cm à $2\pi \times 6 = 12\pi$ cm : il est multiplié par 2. L'aire passe de $\pi \times 3^2 = 9\pi$ cm² à

$$\pi \times 6^2 = 36\pi \text{ cm}^2$$

elle est multipliée par $4 = (-2)^2$, conformément à la règle des aires.

Réponse. a) Un cercle de rayon 6 cm ; b) en I', image de I ; c) périmètre ×2, aire ×4.

Correction de l'exercice 13 – Une ombre portée

a) Les distances à la lampe sont mesurées perpendiculairement à la figurine et au mur, qui sont parallèles. Le rapport est le quotient des distances au centre, en mêmes unités :

$$k = \frac{300}{80} = 3{,}75$$

Il est positif, l'ombre étant du même côté de la lampe que la figurine.

b) Les longueurs sont multipliées par 3,75 : l'ombre mesure $12 \times 3{,}75 = 45$ cm de haut.

c) L'aire de la carte vaut $10 \times 6 = 60$ cm². L'aire est multipliée par $3{,}75^2 = 14{,}0625$, d'où une ombre de $60 \times 14{,}0625 = 843{,}75$ cm². **Contrôle** : l'ombre est un rectangle de 37,5 cm sur 22,5 cm, d'aire 843,75 cm².

Réponse. a) $k = 3{,}75$; b) 45 cm ; c) 843,75 cm².

Correction de l'exercice 14 – Repérer une erreur

Il y a deux erreurs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

D’abord, une aire ne peut pas être négative : le signe du rapport indique seulement de quel côté du centre se trouve l’image, il n’agit pas sur les mesures. Les longueurs sont multipliées par la valeur absolue $|k| = 3$.

Ensuite, une aire n’est pas multipliée par le rapport, mais par son carré, car elle est le produit de deux longueurs, chacune multipliée par 3. La bonne réponse est

$$8 \times (-3)^2 = 8 \times 9 = 72 \text{ cm}^2$$

Contrôle sur un exemple : un carré de côté 1 cm (aire 1 cm²) devient un carré de côté 3 cm, d’aire 9 cm², soit 9 fois plus.

Réponse. L’aire est multipliée par $k^2 = 9$: 72 cm² (et une aire n’est jamais négative).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : un triangle et deux homothéties

a) $AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100 = BC^2$: d’après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

b) Configuration de Thalès de sommet A, avec M sur $[AB]$: AMN est l’image de ABC par l’homothétie de centre A et de rapport positif $k = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1{,}5}{6} = 0{,}25$. Donc $AN = 0{,}25 \times 8 = 2$ cm et $MN = 0{,}25 \times 10 = 2{,}5$ cm.

c) Le triangle ABC est rectangle en A : son aire vaut $\dfrac{6 \times 8}{2} = 24$ cm². Le triangle AMN, rectangle en A lui aussi (les angles sont conservés), a pour aire $\dfrac{1{,}5 \times 2}{2} = 1{,}5$ cm². On vérifie

$$24 \times 0{,}25^2 = 24 \times 0{,}0625 = 1{,}5 \text{ cm}^2$$

d) P est de l’autre côté de A par rapport à B : c’est une configuration papillon, et APQ est l’image de ABC par l’homothétie de centre A et de rapport négatif $k = -\dfrac{AP}{AB} = -\dfrac{3}{6} = -0{,}5$. Donc $PQ = 0{,}5 \times 10 = 5$ cm.

Réponse. a) $36 + 64 = 100$; b) centre A, rapport 0,25 : $AN = 2$ cm, $MN = 2{,}5$ cm ; c) 24 et 1,5 cm² (×0,0625) ; d) rapport $-0{,}5$, $PQ = 5$ cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).