

Plaquette 3 – Longueurs, aires et volumes : les trois exposants

Homothéties — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois règles.

longueurs $\times |k|$ aires $\times k^2$ volumes $\times k^3$

Grandeur	Exemples	Exposant
longueur	côté, périmètre, rayon, hauteur, diagonale	1
aire	surface d'une face, aire totale, section	2
volume	contenance, masse à matière égale	3

Pourquoi ces exposants. Une aire est un produit de deux longueurs, un volume de trois. Multiplier chaque longueur par k multiplie donc le produit par k^2 ou k^3 .

Le signe disparaît pour les aires. Comme $k^2 > 0$ pour tout k non nul, une homothétie de rapport -3 et une de rapport 3 ont le même effet sur les aires.

Remonter du rapport des aires. Si les aires sont dans le rapport R , alors

$$|k| = \sqrt{R}$$

Remonter du rapport des volumes.

$$|k| = \sqrt[3]{R}$$

Cas fréquents à connaître.

Rapport des longueurs	Aires	Volumes
2	4	8
3	9	27
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
10	100	1000

Masse et volume. Pour un objet plein du même matériau, la masse suit le **volume** : elle est multipliée par k^3 .

Correction de l'exercice 1 – Les trois effets

a) **Règle** : longueurs multipliées par $|k|$ ✓

— **Calcul** : 4×7 ✓

— **Résultat** :

28 cm

b) **Règle** : aires multipliées par k^2 ✓

— **Calcul de k^2** : $4^2 = 16$ ✓

— **Aire de l'image** : 16×12 ✓

— **Résultat** :

$$192 \text{ cm}^2$$

c) **Règle** : volumes multipliés par k^3 ✓

— **Calcul de k^3** : $4^3 = 64$ ✓

— **Volume de l'image** : 64×5 ✓

— **Résultat** :

$$320 \text{ cm}^3$$

— **Piège à éviter** : multiplier l'aire par 4 ✓

— **Ce que cela donnerait** : 48 cm^2 , quatre fois trop peu ✓

— **Piège pour le volume** : multiplier par 4 ou par 16 ✓

— **Contrôle avec un cube d'arête 1 cm** : volume 1 cm^3 ✓

— **Arête de l'image** : 4 cm ✓

— **Volume de l'image** : 64 cm^3 ✓

— **Rapport** : 64 ✓

— **Concordance avec k^3** ✓

— **Aire totale du cube initial** : 6 cm^2 ✓

— **Aire totale de l'image** : $6 \times 16 = 96 \text{ cm}^2$ ✓

Réponse. a) 28 cm · b) 192 cm^2 · c) 320 cm^3 .

Correction de l'exercice 2 - Une réduction

a) **Règle** : périmètres multipliés par $|k|$ ✓

— **Calcul** : $\frac{45}{3}$ ✓

— **Résultat** :

$$15 \text{ cm}$$

b) **Rapport des aires** : $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ✓

— **Valeur** : $\frac{1}{9}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{81}{9}$ ✓

— **Résultat** :

$$9 \text{ cm}^2$$

c) **Rapport des volumes** : $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ ✓

— **Valeur** : $\frac{1}{27}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{54}{27}$ ✓

— **Résultat** :

$$2 \text{ cm}^3$$

— **Observation** : diviser les longueurs par 3 divise le volume par 27 ✓

— **Interprétation** : une réduction modeste fait fondre le volume ✓

— **Exemple concret** : une maquette au tiers ✓

— **Volume** : moins de 4 % de l'original ✓

— **Contrôle** : $\frac{1}{27} \approx 3,7\%$ ✓

- **Effet sur la masse d'un objet plein** : divisée par 27 ✓
- **Objet de 54 kg** : la maquette pèserait 2 kg ✓
- **Effet sur l'aire de peinture** : divisée par 9 ✓
- **Interprétation** : on peint neuf fois moins de surface ✓

Réponse. a) 15 cm · b) 9 cm² · c) 2 cm³.

Correction de l'exercice 3 – Remonter du rapport des aires

a) **Rapport** : $\frac{400}{25}$ ✓

— **Résultat** :

16

b) **Relation** : le rapport des aires vaut k^2 ✓

— **Équation** : $k^2 = 16$ ✓

— **Racine carrée** : $|k| = 4$ ✓

— **Rapport des longueurs** :

4

— **Contrôle** : $4^2 = 16$ ✓

c) **Règle** : les périmètres suivent le rapport des longueurs ✓

— **Calcul** : 4×20 ✓

— **Résultat** :

80 cm

— **Piège** : multiplier le périmètre par 16 ✓

— **Ce que cela donnerait** : 320 cm ✓

— **Contrôle avec deux carrés** : aire 25 cm², côté 5 cm ✓

— **Périmètre** : 20 cm ✓

— **Aire 400 cm², côté** : 20 cm ✓

— **Périmètre** : 80 cm ✓

— **Concordance** ✓

— **Rapport des volumes correspondant** : $4^3 = 64$ ✓

— **Si la petite figure engendrait un solide de 3 cm³** : 192 cm³ ✓

— **Contrôle** : $64 \times 3 = 192$ ✓

Réponse. a) 16 · b) 4 · c) 80 cm.

Correction de l'exercice 4 – Remonter du rapport des volumes

a) **Rapport** : $\frac{2000}{16}$ ✓

— **Résultat** :

125

b) **Relation** : le rapport des volumes vaut k^3 ✓

— **Équation** : $k^3 = 125$ ✓

— **Recherche du cube** : $5^3 = 125$ ✓

— **Rapport des longueurs** :

5

c) **Rapport des aires** : k^2 ✓

— **Calcul** : 5^2 ✓

— **Résultat** :

25

— **Contrôle avec deux cubes** : volume 16 cm^3 ✓

— **Arête** : $\sqrt[3]{16} \approx 2,52 \text{ cm}$ ✓

— **Volume** 2000 cm^3 , **arête** : $\approx 12,60 \text{ cm}$ ✓

— **Rapport des arêtes** : ≈ 5 ✓

— **Concordance** ✓

— **Aire totale du petit cube** : $6 \times 2,52^2 \approx 38,1 \text{ cm}^2$ ✓

— **Aire totale du grand** : $6 \times 12,6^2 \approx 952,4 \text{ cm}^2$ ✓

— **Rapport** : ≈ 25 ✓

— **Concordance** ✓

— **Ordre des trois rapports** : 5, 25, 125 ✓

— **Remarque** : ce sont les puissances successives de 5 ✓

Réponse. a) 125 · b) 5 · c) 25 .

Correction de l'exercice 5 - Deux cubes

a) **Arête** : 3 cm ✓

— **Aire d'une face** : 9 cm^2 ✓

— **Aire totale** : 6×9 ✓

— **Valeur** : 54 cm^2 ✓

— **Volume** : 3^3 ✓

— **Valeur** :

27 cm^3

b) **Arête de l'image** : $2,5 \times 3$ ✓

— **Valeur** : $7,5 \text{ cm}$ ✓

— **Aire d'une face** : $7,5^2 = 56,25 \text{ cm}^2$ ✓

— **Aire totale** : $6 \times 56,25$ ✓

— **Valeur** : $337,5 \text{ cm}^2$ ✓

— **Volume** : $7,5^3$ ✓

— **Valeur** :

$421,875 \text{ cm}^3$

c) **Rapport des arêtes** : $\frac{7,5}{3} = 2,5$ ✓

— **Rapport des aires** : $\frac{337,5}{54}$ ✓

— **Valeur** : $6,25$ ✓

— **Contrôle** : $2,5^2 = 6,25$ ✓

— **Rapport des volumes** : $\frac{421,875}{27}$ ✓

— **Valeur** :

$15,625$

— **Contrôle** : $2,5^3 = 15,625$ ✓

- **Concordance des trois rapports** ✓
- **Diagonale du petit cube** : $3\sqrt{3} \approx 5,20$ cm ✓
- **Diagonale de l'image** : $7,5\sqrt{3} \approx 12,99$ cm ✓
- **Rapport** : 2,5 ✓

Réponse. a) 54 cm^2 et 27 cm^3 · b) $337,5 \text{ cm}^2$ et $421,875 \text{ cm}^3$ · c) 2,5, 6,25 et 15,625.

Correction de l'exercice 6 – La masse d'une statue

a) **Rapport des hauteurs** : $\frac{60}{20}$ ✓

— **Résultat** :

$$k = 3$$

— **Nature** : agrandissement ✓

b) **Lien masse-volume** : à matière égale, la masse suit le volume ✓

— **Rapport des volumes** : k^3 ✓

— **Calcul** : $3^3 = 27$ ✓

— **Masse de la copie** : $27 \times 2,4$ ✓

— **Résultat** :

$$64,8 \text{ kg}$$

— **Piège** : multiplier la masse par 3 ✓

— **Ce que cela donnerait** : 7,2 kg ✓

— **Absurdité** : une statue trois fois plus haute serait bien plus lourde ✓

— **Contrôle de vraisemblance** : 64,8 kg pour 60 cm de bronze plein ✓

— **Appréciation** : c'est plausible, le bronze est dense ✓

— **Surface à dorer, rapport** : $k^2 = 9$ ✓

— **Si la statuette demandait 500 cm² de feuille d'or** : 4500 cm² ✓

— **Coût proportionnel à la surface** : multiplié par 9 ✓

— **Coût du bronze, proportionnel à la masse** : multiplié par 27 ✓

— **Conclusion** : agrandir coûte très cher ✓

— **Masse d'une copie de 10 cm** : $\frac{2,4}{8} = 0,3$ kg ✓

Réponse. a) $k = 3$ · b) 64,8 kg.

Correction de l'exercice 7 – Un ballon

a) **Rapport des aires** : $1,2^2$ ✓

— **Calcul** : 1,44 ✓

— **Augmentation** : $1,44 - 1$ ✓

— **En pourcentage** :

$$+44 \%$$

b) **Rapport des volumes** : $1,2^3$ ✓

— **Calcul** : 1,728 ✓

— **Augmentation** : 0,728 ✓

— **En pourcentage** :

$$+72,8 \%$$

- **Observation** : augmenter le rayon de 20 % augmente le volume de près de 73 % ✓
- **Contrôle avec un rayon de 10 cm** : volume $\frac{4}{3}\pi \times 1000 \approx 4189 \text{ cm}^3$ ✓
- **Nouveau rayon** : 12 cm ✓
- **Nouveau volume** : $\frac{4}{3}\pi \times 1728 \approx 7238 \text{ cm}^3$ ✓
- **Rapport** : $\approx 1,728$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Surface initiale** : $4\pi \times 100 \approx 1257 \text{ cm}^2$ ✓
- **Surface finale** : $4\pi \times 144 \approx 1810 \text{ cm}^2$ ✓
- **Rapport** : $\approx 1,44$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Rapport pour doubler le volume** : $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$ ✓
- **Interprétation** : 26 % de rayon en plus suffisent ✓

Réponse. a) +44 % · b) +72,8 %.

Correction de l'exercice 8 - Une piscine réduite

a) **Rapport des volumes** : $\left(\frac{1}{10}\right)^3$ ✓

— **Valeur** : $\frac{1}{1000}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{60}{1000}$ ✓

— **Résultat** : $0,06 \text{ m}^3$ ✓

— **Conversion en litres** :

60 L

— **Contrôle** : 1 m^3 vaut 1000 L ✓

— **Remarque** : la coïncidence des nombres vient du rapport $\frac{1}{1000}$ ✓

b) **Rapport des aires** : $\left(\frac{1}{10}\right)^2$ ✓

— **Valeur** :

$\frac{1}{100}$

— **Interprétation** : il faut 1 % de la bâche ✓

— **Si la vraie bâche fait 50 m^2** : $0,5 \text{ m}^2$ ✓

— **Rapport des longueurs** : $\frac{1}{10}$ ✓

— **Si la piscine fait 10 m de long** : le modèle fait 1 m ✓

— **Profondeur de 1,5 m** : 15 cm sur le modèle ✓

— **Contrôle du volume** : $1 \times 0,6 \times 0,1 = 0,06 \text{ m}^3$ ✓

— **Cohérence** : avec une largeur de 6 m réduite à 0,6 m ✓

— **Vraie contenance** : $10 \times 6 \times 1 = 60 \text{ m}^3$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Masse d'eau du modèle** : 60 kg ✓

— **Masse d'eau réelle** : 60 tonnes ✓

Réponse. a) $0,06 \text{ m}^3$, soit 60 L · b) 1 % de la surface.

Correction de l'exercice 9 - Deux triangles semblables

a) **Rapport, du petit vers le grand** : $\frac{48}{27}$ ✓

— **Simplification par 3** : $\frac{16}{9}$ ✓

— **Valeur approchée** :

$$\approx 1,778$$

b) **Relation** : ce rapport vaut k^2 ✓

— **Équation** : $k^2 = \frac{16}{9}$ ✓

— **Racine carrée** : $\frac{4}{3}$ ✓

— **Rapport des longueurs** :

$$\frac{4}{3} \approx 1,333$$

— **Contrôle** : $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ ✓

c) **Sens du rapport** : on passe du grand au petit ✓

— **Coefficient** : $\frac{3}{4}$ ✓

— **Calcul** : $\frac{3}{4} \times 12$ ✓

— **Résultat** :

$$9 \text{ cm}$$

— **Contrôle** : $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Rapport des périmètres** : $\frac{4}{3}$ ✓

— **Si le grand a un périmètre de 32 cm** : 24 cm pour le petit ✓

— **Contrôle** : $32 \times \frac{3}{4} = 24$ ✓

— **Piège** : appliquer $\frac{16}{9}$ aux longueurs ✓

— **Ce que cela donnerait** : 6,75 cm ✓

— **Erreur** : plus de 2 cm ✓

Réponse. a) $\frac{16}{9}$ · b) $\frac{4}{3}$ · c) 9 cm.

Correction de l'exercice 10 - Une boîte agrandie

a) **Volume initial** : $20 \times 15 \times 10$ ✓

— **Produit partiel** : 300 ✓

— **Volume** : 3000 cm^3 ✓

— **Dimensions de l'image** : 30, 22,5 et 15 cm ✓

— **Volume final** : $30 \times 22,5 \times 15$ ✓

— **Produit partiel** : 675 ✓

— **Volume** :

$$10\,125 \text{ cm}^3$$

b) **Rapport des volumes** : $\frac{10\,125}{3000}$ ✓

— **Valeur** : 3,375 ✓

— **Contrôle** : $1,5^3$ ✓

— **Valeur** :

3,375

— **Concordance** ✓

c) **Aire totale initiale** : $2(300 + 200 + 150)$ ✓

— **Somme** : 650 ✓

— **Aire** : 1300 cm^2 ✓

— **Rapport des aires** : $1,5^2 = 2,25$ ✓

— **Aire finale** : $2,25 \times 1300$ ✓

— **Résultat** : 2925 cm^2 ✓

— **Augmentation** : $2925 - 1300$ ✓

— **Résultat** :

1625 cm^2

— **Contrôle direct** : $2(675 + 450 + 337,5)$ ✓

— **Somme** : 1462,5 ✓

— **Aire** : 2925 cm^2 ✓

— **Concordance** ✓

— **Contenance initiale en litres** : 3 L ✓

— **Contenance finale** : 10,125 L ✓

Réponse. a) 3000 cm^3 et $10\,125 \text{ cm}^3$ · b) $3,375 = 1,5^3$ · c) $+1625 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 11 - Deux pizzas

a) **Rapport** : $\frac{39}{26}$ ✓

— **Simplification par 13** : $\frac{3}{2}$ ✓

— **Valeur** :

1,5

b) **Rapport des aires** : $1,5^2$ ✓

— **Valeur** :

2,25

— **Interprétation** : la grande pizza fait 2,25 fois la surface de la petite ✓

c) **Rapport des prix** : $\frac{18}{9} = 2$ ✓

— **Comparaison** : $2,25 > 2$ ✓

— **Conclusion** : la **grande** pizza est plus avantageuse ✓

— **Aire de la petite** : $\pi \times 13^2 \approx 530,9 \text{ cm}^2$ ✓

— **Prix au centimètre carré** : $\frac{9}{530,9} \approx 0,0170 \text{ €}$ ✓

— **Aire de la grande** : $\pi \times 19,5^2 \approx 1194,6 \text{ cm}^2$ ✓

— **Prix au centimètre carré** : $\frac{18}{1194,6} \approx 0,0151 \text{ €}$ ✓

- **Comparaison** : la grande coûte moins cher au centimètre carré ✓
- **Économie relative** : environ 11 % ✓
- **Piège** : comparer les diamètres aux prix ✓
- **Ce que cela donnerait** : 1,5 contre 2, donc la petite ✓
- **Pourquoi c'est faux** : on mange de la surface, pas du diamètre ✓
- **Prix « juste » de la grande** : $9 \times 2,25 = 20,25$ € ✓

Réponse. a) 1,5 · b) 2,25 · c) la grande (prix $\times 2$ pour 2,25 fois la surface).

Correction de l'exercice 12 - Un rapport à trouver

a) **Rapport des aires** : $\frac{175}{7}$ ✓

- **Valeur** : 25 ✓
- **Relation** : ce rapport vaut k^2 ✓
- **Équation** : $k^2 = 25$ ✓
- **Racine carrée** :

$$|k| = 5$$

- **Remarque** : le rapport peut valoir 5 ou -5 ✓
- **Raison** : le carré efface le signe ✓

b) **Rapport des volumes** : $|k|^3$ ✓

- **Calcul** : 5^3 ✓
- **Résultat** :

$$125$$

- **Contrôle avec deux carrés** : aire 7 cm², côté $\sqrt{7} \approx 2,65$ cm ✓
- **Côté de l'image** : $\approx 13,23$ cm ✓
- **Aire** : ≈ 175 cm² ✓
- **Concordance** ✓
- **Rapport des périmètres** : 5 ✓
- **Si le périmètre initial vaut 11 cm** : 55 cm ✓
- **Cas où l'aire serait multipliée par 2** : $|k| = \sqrt{2} \approx 1,41$ ✓
- **Interprétation** : 41 % de longueur en plus doublent l'aire ✓
- **Lien avec les formats de papier** : c'est le coefficient 141 % ✓

Réponse. a) $|k| = 5$ · b) 125.

Correction de l'exercice 13 - Comparer deux maquettes

a) **Longueur d'une pièce réelle** : L ✓

- **Sur la maquette A** : $\frac{L}{50}$ ✓
- **Sur la maquette B** : $\frac{L}{100}$ ✓
- **Rapport de A sur B** : $\frac{L/50}{L/100}$ ✓
- **Simplification** : $\frac{100}{50}$ ✓
- **Résultat** :

$$2$$

- **Interprétation** : la maquette A est deux fois plus grande ✓

b) **Rapport des volumes** : 2^3 ✓

— **Résultat** :

8

— **Interprétation** : A occupe huit fois plus de place ✓

— **Rapport des aires** : $2^2 = 4$ ✓

— **Exemple avec un bâtiment de 30 m de haut** ✓

— **Hauteur sur A** : $\frac{3000}{50} = 60$ cm ✓

— **Hauteur sur B** : $\frac{3000}{100} = 30$ cm ✓

— **Rapport** : 2 ✓

— **Concordance** ✓

— **Volume réel de 5000 m³** ✓

— **Volume sur A** : $\frac{5000}{125\,000} = 0,04$ m³ ✓

— **Volume sur B** : $\frac{5000}{1\,000\,000} = 0,005$ m³ ✓

— **Rapport** : 8 ✓

— **Concordance** ✓

— **En litres** : 40 L contre 5 L ✓

Réponse. a) 2 · b) 8.

Correction de l'exercice 14 - Le prix de la peinture

— **Rapport des longueurs** : $\frac{45}{30}$ ✓

— **Simplification** : 1,5 ✓

— **Grandeur concernée par la peinture** : la **surface** ✓

— **Rapport des surfaces** : $1,5^2$ ✓

— **Valeur** : 2,25 ✓

— **Coût** : $2,25 \times 6$ ✓

— **Résultat** :

13,50 €

— **Piège** : multiplier par 1,5 ✓

— **Ce que cela donnerait** : 9 € ✓

— **Erreur** : 4,50 € de moins ✓

— **Autre piège** : multiplier par $1,5^3 = 3,375$ ✓

— **Ce que cela donnerait** : 20,25 € ✓

— **Pourquoi c'est faux** : on peint une surface, pas un volume ✓

— **Coût de la matière du modèle** : lui, suivrait k^3 ✓

— **Si la matière coûtait 8 € pour le petit** : 27 € pour le grand ✓

— **Contrôle** : $3,375 \times 8 = 27$ € ✓

— **Coût d'un liseré sur les arêtes** : il suivrait k ✓

— **Si le liseré coûtait 2 €** : 3 € ✓

— **Bilan** : chaque poste a son exposant ✓

Réponse. 13,50 € : la peinture suit la surface, donc $k^2 = 2,25$.

Correction de l'exercice 15 - Repérer les trois erreurs

- **Rapport** : $k = \frac{1}{2}$ ✓
- **Première affirmation** : le périmètre divisé par 4 ✓
- **Règle correcte** : le périmètre suit $|k|$ ✓
- **Correction** :
le périmètre est divisé par 2
- **Deuxième affirmation** : l'aire divisée par 2 ✓
- **Règle correcte** : l'aire suit k^2 ✓
- **Calcul** : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ✓
- **Correction** :
l'aire est divisée par 4
- **Troisième affirmation** : le volume divisé par 6 ✓
- **Règle correcte** : le volume suit k^3 ✓
- **Calcul** : $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ ✓
- **Correction** :
le volume est divisé par 8
- **Origine de l'erreur** : l'élève a inversé les deux premiers exposants ✓
- **Et inventé le troisième** ✓
- **Contrôle avec un cube d'arête 4 cm** ✓
- **Arête de l'image** : 2 cm ✓
- **Rapport des arêtes** : 2 ✓
- **Volumes** : 64 cm³ et 8 cm³ ✓
- **Rapport** : 8 ✓
- **Aires totales** : 96 cm² et 24 cm² ✓
- **Rapport** : 4 ✓

Réponse. Périmètre divisé par 2, aire par 4, volume par 8.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une fusée miniature

- a) **Rapport** : $\frac{1,4}{70}$ ✓
- **Simplification** : $\frac{1}{50}$ ✓
 - **Valeur décimale** :
0,02
 - **Interprétation** : échelle au cinquantième ✓
- b) **Rapport des masses** : k^3 ✓
- **Calcul** : $\left(\frac{1}{50}\right)^3$ ✓
 - **Valeur** : $\frac{1}{125\,000}$ ✓
 - **Masse de la réplique** : $\frac{750}{125\,000}$ ✓

— **Résultat** : 0,006 tonne ✓

— **Conversion** :

6 kg

c) **Rapport des surfaces** : k^2 ✓

— **Calcul** : $\left(\frac{1}{50}\right)^2$ ✓

— **Résultat** :

$$\frac{1}{2500}$$

— **En pourcentage** : 0,04 % ✓

— **Si la fusée demandait 2500 m² de peinture** : 1 m² ✓

d) **Constat** : 6 kg pour une réplique de 1,4 m ✓

— **Appréciation** : c'est lourd pour une maquette ✓

— **Explication** : la fusée réelle est en grande partie **vide** ✓

— **Conséquence** : la réplique pleine serait bien plus dense ✓

— **Correction pratique** : on utilise des matériaux légers ✓

— **Ou** : on la fabrique creuse ✓

— **Limite du modèle** : la proportionnalité suppose une matière identique partout ✓

— **Masse d'une réplique creuse** : elle suivrait plutôt la **surface** ✓

— **Ordre de grandeur alors** : $\frac{750\,000}{2500} = 300$ kg ✓

— **Constat** : ce n'est pas réaliste non plus ✓

— **Réalité** : une maquette utilise d'autres matériaux, bien plus légers ✓

Réponse. a) $\frac{1}{50}$ · b) 6 kg · c) $\frac{1}{2500}$, soit 0,04 % · d) une fusée réelle est creuse, le calcul suppose du plein.