Plaquette 3 – Longueurs, aires et volumes : les trois exposants

Homothéties — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois règles.

$$\text{longueurs} \times |k| \qquad \text{aires} \times k^2 \qquad \text{volumes} \times k^3$$

Grandeur	Exemples	Exposant
longueur	côté, périmètre, rayon, hauteur, diagonale	1
aire	surface d'une face, aire totale, section	2
volume	contenance, masse à matière égale	3

Pourquoi ces exposants. Une aire est un produit de deux longueurs, un volume de trois. Multiplier chaque longueur par k multiplie donc le produit par k^2 ou k^3.

Le signe disparaît pour les aires. Comme $k^2 > 0$ pour tout k non nul, une homothétie de rapport -3 et une de rapport 3 ont le même effet sur les aires.

Remonter du rapport des aires. Si les aires sont dans le rapport R, alors

$$|k| = \sqrt{R}$$

Remonter du rapport des volumes.

$$|k| = \sqrt[3]{R}$$

Cas fréquents à connaître.

Rapport des longueurs	Aires	Volumes
2	4	8
3	9	27
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
10	100	1000

Masse et volume. Pour un objet plein du même matériau, la masse suit le **volume** : elle est multipliée par k^3.

Correction de l'exercice 1 – Les trois effets

Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$. Ici $k = 4$.

a) Le segment mesure $4 \times 7 = 28$ cm.

b) Les aires sont multipliées par $4^2 = 16$: la surface mesure $16 \times 12 = 192$ cm².

c) Les volumes sont multipliés par $4^3 = 64$:

$$64 \times 5 = 320 \text{ cm}^3$$

Contrôle avec un cube de 1 cm d'arête : son image a une arête de 4 cm et un volume de $4 \times 4 \times 4 = 64$ cm³, soit 64 fois plus. Multiplier l'aire par 4 seulement donnerait 48 cm²,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

quatre fois trop peu.

Réponse. a) 28 cm · b) 192 cm² · c) 320 cm³.

Correction de l’exercice 2 – Une réduction

Avec $k = \frac{1}{3}$, les longueurs sont divisées par 3, les aires par $3^2 = 9$ et les volumes par $3^3 = 27$.

a) Le périmètre est une longueur : $45 \div 3 = 15$ cm.

b) L’aire devient $81 \div 9 = 9$ cm².

c) Le volume devient

$$54 \div 27 = 2 \text{ cm}^3$$

Interprétation : une réduction au tiers ne garde que $\frac{1}{27}$ du volume, moins de 4 %. Une maquette pleine au tiers d’un objet de 54 kg pèserait seulement 2 kg, dans la même matière.

Réponse. a) 15 cm · b) 9 cm² · c) 2 cm³.

Correction de l’exercice 3 – Remonter du rapport des aires

a) Le rapport des aires vaut

$$\frac{400}{25} = 16$$

b) Le rapport des aires est le carré du rapport des longueurs : $k^2 = 16$. Le rapport des longueurs est un nombre positif, donc $k = 4$ (puisque $4^2 = 16$).

c) Le périmètre est une longueur, il est multiplié par 4 : $4 \times 20 = 80$ cm.

Contrôle avec deux carrés : un carré d’aire 25 cm² a un côté de 5 cm et un périmètre de 20 cm ; un carré d’aire 400 cm² a un côté de 20 cm et un périmètre de 80 cm. Multiplier le périmètre par 16 donnerait 320 cm, ce qui est faux.

Réponse. a) 16 · b) 4 · c) 80 cm.

Correction de l’exercice 4 – Remonter du rapport des volumes

a) Le rapport des volumes vaut

$$\frac{2000}{16} = 125$$

b) Le rapport des volumes est le cube du rapport des longueurs : $k^3 = 125$. On cherche le nombre dont le cube vaut 125 : $5 \times 5 \times 5 = 125$, donc $k = 5$. Les longueurs du grand solide sont cinq fois celles du petit.

c) Le rapport des aires vaut $k^2 = 5^2 = 25$.

Les trois rapports 5, 25 et 125 sont les puissances successives de 5 : une dimension pour les longueurs, deux pour les aires, trois pour les volumes.

Réponse. a) 125 · b) 5 · c) 25.

Correction de l’exercice 5 – Deux cubes

a) Le cube initial a une arête de 3 cm. Chaque face mesure $3 \times 3 = 9$ cm², donc l’aire totale vaut $6 \times 9 = 54$ cm², et le volume $3^3 = 27$ cm³.

b) L’arête de l’image vaut $2{,}5 \times 3 = 7{,}5$ cm. Une face mesure $7{,}5^2 = 56{,}25$ cm², l’aire

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

totale $6 \times 56{,}25 = 337{,}5$ cm², et le volume $7{,}5^3 = 421{,}875$ cm³.

c) On compare les résultats :

$$\frac{7{,}5}{3} = 2{,}5 \qquad \frac{337{,}5}{54} = 6{,}25 = 2{,}5^2 \qquad \frac{421{,}875}{27} = 15{,}625 = 2{,}5^3$$

Les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3.

Réponse. a) 54 cm² et 27 cm³ · b) 337,5 cm² et 421,875 cm³ · c) 2,5, 6,25 et 15,625.

Correction de l’exercice 6 – La masse d’une statue

a) Le rapport est le quotient des hauteurs : $k = \frac{60}{20} = 3$. C’est un agrandissement.

b) Dans le même bronze, la masse est proportionnelle au volume. Or les volumes sont multipliés par $k^3 = 3^3 = 27$:

$$27 \times 2{,}4 = 64{,}8 \text{ kg}$$

Piège : multiplier la masse par 3 donnerait 7,2 kg, bien trop peu pour une statue trois fois plus haute dans toutes les directions. À l’inverse, la surface à dorer n’est multipliée que par $k^2 = 9$: agrandir une statue coûte beaucoup plus en métal qu’en dorure.

Réponse. a) $k = 3$ · b) 64,8 kg.

Correction de l’exercice 7 – Un ballon

Multiplier le rayon par 1,2, c’est appliquer un agrandissement de rapport $k = 1{,}2$ au ballon.

a) La surface est multipliée par $k^2 = 1{,}2^2 = 1{,}44$. Elle augmente donc de $1{,}44 - 1 = 0{,}44$, soit

$$+44\,\%$$

b) Le volume est multiplié par $k^3 = 1{,}2^3 = 1{,}728$: il augmente de 72,8 %.

Contrôle avec un rayon de 10 cm : le volume passe de $\frac{4}{3}\pi \times 10^3 \approx 4189$ cm³ à $\frac{4}{3}\pi \times 12^3 \approx 7238$ cm³, et $7238 \div 4189 \approx 1{,}728$. Augmenter le rayon de 20 % augmente le volume de près de 73 %.

Réponse. a) +44 % · b) +72,8 %.

Correction de l’exercice 8 – Une piscine réduite

a) Le modèle est une réduction de rapport $\frac{1}{10}$: les volumes sont divisés par $10^3 = 1000$, donc

$$60 \div 1000 = 0{,}06 \text{ m}^3 = 60 \text{ L}$$

puisque 1 m³ vaut 1000 L.

b) Les aires sont divisées par $10^2 = 100$: il faut $\frac{1}{100}$ de la surface de bâche, c’est-à-dire 1 %. Par exemple, une bâche de 50 m² devient 0,5 m² sur le modèle.

Contrôle : une piscine de 10 m sur 6 m et 1 m de profondeur contient bien 60 m³ ; son modèle mesure 1 m sur 0,6 m sur 0,1 m, soit 0,06 m³.

Réponse. a) 0,06 m³, soit 60 L · b) 1 % de la surface.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 9 – Deux triangles semblables

a) Du petit vers le grand, le rapport des aires vaut $\frac{48}{27} = \frac{16}{9}$ (simplification par 3).

b) Ce rapport est le carré du rapport des longueurs : $k^2 = \frac{16}{9}$, donc $k = \frac{4}{3}$ puisque $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

c) On passe cette fois du grand au petit : on multiplie par l’inverse, $\frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{4} \times 12 = 9 \text{ cm}$$

Contrôle : $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. **Piège** : appliquer le rapport des aires aux longueurs donnerait $12 \times \frac{9}{16} = 6{,}75$ cm, ce qui est faux.

Réponse. a) $\frac{16}{9}$ · b) $\frac{4}{3}$ · c) 9 cm.

Correction de l’exercice 10 – Une boîte agrandie

a) Le volume initial vaut $20 \times 15 \times 10 = 3000$ cm³. Les dimensions de la boîte agrandie sont multipliées par 1,5 : 30 cm, 22,5 cm et 15 cm, d’où un volume de

$$30 \times 22{,}5 \times 15 = 10\,125 \text{ cm}^3$$

b) $\frac{10\,125}{3000} = 3{,}375$, et $1{,}5^3 = 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 = 3{,}375$: le volume est bien multiplié par le cube du rapport.

c) L’aire totale initiale vaut $2 \times (20 \times 15 + 20 \times 10 + 15 \times 10) = 2 \times 650 = 1300$ cm². Elle est multipliée par $1{,}5^2 = 2{,}25$, ce qui donne 2925 cm² : il faut $2925 - 1300 = 1625$ cm² de carton en plus.

Réponse. a) 3000 cm³ et 10 125 cm³ · b) $3{,}375 = 1{,}5^3$ · c) +1625 cm².

Correction de l’exercice 11 – Deux pizzas

a) Le rapport des diamètres vaut $\frac{39}{26} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ (simplification par 13).

b) Les deux pizzas sont des disques, l’une est un agrandissement de l’autre de rapport 1,5. Les surfaces sont donc dans le rapport

$$1{,}5^2 = 2{,}25$$

c) Le prix est multiplié par $\frac{18}{9} = 2$, alors que la surface est multipliée par 2,25 : on a plus de pizza que l’on ne paie en plus. La **grande** pizza est la plus avantageuse ; à prix « proportionnel », elle coûterait $9 \times 2{,}25 = 20{,}25$ €.

Piège : comparer le rapport des diamètres (1,5) au rapport des prix (2) ferait choisir la petite. On mange une surface, pas un diamètre.

Réponse. a) 1,5 · b) 2,25 · c) la grande (prix ×2 pour 2,25 fois la surface).

Correction de l’exercice 12 – Un rapport à trouver

a) Le rapport des aires vaut $\frac{175}{7} = 25$. Il est égal au carré du rapport des longueurs :

$$k^2 = 25 \quad \text{donc} \quad |k| = 5$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le rapport de l'homothétie peut être 5 ou -5 : le carré efface le signe, les aires ne permettent pas de les distinguer.

b) Les volumes sont multipliés par $|k|^3 = 5^3 = 125$.

Remarque : le périmètre, qui est une longueur, serait multiplié par 5 : un périmètre de 11 cm deviendrait 55 cm.

Réponse. a) $|k| = 5$ · b) 125.

Correction de l'exercice 13 – Comparer deux maquettes

a) Une longueur réelle L mesure $\frac{L}{50}$ sur la maquette A et $\frac{L}{100}$ sur la maquette B. La première est le double de la seconde, puisque $100 \div 50 = 2$: les longueurs de A sont deux fois celles de B.

b) Les volumes sont dans le rapport

$$2^3 = 8$$

et les aires dans le rapport $2^2 = 4$.

Exemple : un bâtiment de 30 m de haut mesure 60 cm sur A et 30 cm sur B. Un volume réel de 5000 m³ donne $5000 \div 125\,000 = 0{,}04$ m³ sur A et $5000 \div 1\,000\,000 = 0{,}005$ m³ sur B, soit 40 L contre 5 L : huit fois plus.

Réponse. a) 2 · b) 8.

Correction de l'exercice 14 – Le prix de la peinture

Le modèle de 45 cm est un agrandissement de rapport $\frac{45}{30} = 1{,}5$. La peinture recouvre une **surface**, donc la quantité de peinture est multipliée par le rapport des aires :

$$1{,}5^2 = 2{,}25 \quad \text{et} \quad 2{,}25 \times 6 = 13{,}50\ €$$

Pièges : multiplier par 1,5 (le rapport des longueurs) donnerait 9 €, trop peu ; multiplier par $1{,}5^3 = 3{,}375$ donnerait 20,25 €, trop, car on peint une surface et non un volume. En revanche, le coût de la matière du modèle, lui, suivrait le volume.

Réponse. 13,50 € : la peinture suit la surface, donc $k^2 = 2{,}25$.

Correction de l'exercice 15 – Repérer les trois erreurs

Le rapport vaut $k = \frac{1}{2}$. Les longueurs (et donc le périmètre) sont multipliées par $|k|$, les aires par k^2, les volumes par $|k|^3$.

— **Périmètre** : il est multiplié par $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire **divisé par** 2, et non par 4.

— **Aire** : elle est multipliée par $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, donc **divisée par** 4, et non par 2.

— **Volume** : il est multiplié par $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, donc **divisé par** 8, et non par 6.

$$\text{périmètre} \div 2 \qquad \text{aire} \div 4 \qquad \text{volume} \div 8$$

Contrôle avec un cube de 4 cm d'arête : son image a 2 cm d'arête ; les volumes valent 64 cm³ et 8 cm³ (rapport 8), les aires totales 96 cm² et 24 cm² (rapport 4).

Réponse. Périmètre divisé par 2, aire par 4, volume par 8.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : une fusée miniature

a) Le rapport de réduction vaut $k = \dfrac{1{,}4}{70} = \dfrac{1}{50} = 0{,}02$: c’est une réplique au cinquantième.

b) À matériaux identiques, la masse suit le volume, qui est divisé par $50^3 = 125\,000$:

$$750 \div 125\,000 = 0{,}006 \text{ t} = 6 \text{ kg}$$

c) La surface extérieure est divisée par $50^2 = 2500$: il faut peindre $\dfrac{1}{2500}$ de la surface, soit 0,04 %.

d) 6 kg pour une maquette de 1,4 m, c’est lourd. Le calcul suppose une fusée **pleine**, faite de la même matière partout ; or une vraie fusée est en grande partie vide (réservoirs). Une maquette réelle est creuse et faite de matériaux légers : le modèle « masse proportionnelle au volume » ne s’applique pas ici.

Réponse. a) $\dfrac{1}{50}$ · b) 6 kg · c) $\dfrac{1}{2500}$, soit 0,04 % · d) une fusée réelle est creuse, le calcul suppose du plein.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).