Plaquette 1 – Rapport, images et effets sur les mesures

Homothéties — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition et propriétés du cours.

— L'**homothétie** de centre O et de rapport k (non nul) associe au point M le point M' tel que O, M, M' soient alignés et

$$OM' = |k| \times OM$$

— Signe du rapport : si $k > 0$, M' est du **même côté** de O que M ; si $k < 0$, il est de l'**autre côté**.

— $|k| > 1$: **agrandissement**. $|k| < 1$: **réduction**. $k = 1$: rien ne change. $k = -1$: c'est la **symétrie centrale** de centre O.

— Effets sur les mesures : longueurs $\times|k|$, **aires** $\times k^2$, **volumes** $\times|k|^3$.

— Une homothétie conserve les angles, le parallélisme et les alignements : l'image d'une figure lui est **semblable**.

— Échelle d'une maquette : échelle $= \dfrac{\text{longueur sur la maquette}}{\text{longueur réelle}}$ (mêmes unités).

Correction de l'exercice 1 – Image d'un point sur une droite

a) Le rapport est positif : A' est sur la demi-droite $[OA)$, du même côté de O que A. Il est plus grand que 1, donc A' est plus loin de O que A : c'est un agrandissement. La distance au centre est multipliée par le rapport :

$$OA' = 2{,}5 \times OA = 2{,}5 \times 2 = 5 \text{ cm}$$

b) Les points O, A et A' sont alignés dans cet ordre, donc $AA' = OA' - OA = 5 - 2 = 3$ cm. **Contrôle** sur la figure : A' est bien au-delà de A, à une distance de O deux fois et demie plus grande.

Réponse. a) Sur $[OA)$, au-delà de A, avec $OA' = 5$ cm ; b) $AA' = 3$ cm.

Correction de l'exercice 2 – Une réduction de rapport négatif

a) Le rapport est négatif : B' est sur la droite (OB), mais de l'**autre côté** de O par rapport à B. La distance au centre est multipliée par la valeur absolue du rapport :

$$OB' = 0{,}5 \times OB = 0{,}5 \times 6 = 3 \text{ cm}$$

b) Le centre O est entre B et B', donc $BB' = OB + OB' = 6 + 3 = 9$ cm.

c) La valeur absolue du rapport, 0,5, est inférieure à 1 : c'est une **réduction**. Les longueurs de toute figure sont divisées par 2, et la figure image est « retournée » de l'autre côté du centre.

Réponse. a) De l'autre côté de O, avec $OB' = 3$ cm ; b) $BB' = 9$ cm ; c) une réduction.

Correction de l'exercice 3 – Rapport négatif

a) Une homothétie multiplie les longueurs par la valeur absolue de son rapport :

$$A'B' = |-3| \times AB = 3 \times 2 = 6 \text{ cm}$$

b) Oui : une homothétie transforme une droite en une droite parallèle (ou en elle-même si

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

elle passe par le centre). L'image $[A'B']$ est donc parallèle à $[AB]$.

c) Le rapport est négatif : A' est sur la droite (OA), de l'autre côté de O par rapport à A, et trois fois plus loin ; de même pour B'. Le segment image est « retourné » : en allant de A' vers B', on va dans le sens contraire de celui qui mène de A à B. Avec $k = -1$, on retrouverait la symétrie centrale de centre O.

Réponse. a) $A'B' = 6$ cm ; b) oui, $(A'B') \parallel (AB)$; c) de l'autre côté de O, trois fois plus loin.

Correction de l'exercice 4 – Retrouver le rapport

a) La relation du cours donne $OA' = |k| \times OA$, donc

$$|k| = \frac{OA'}{OA} = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5$$

— A et A' sont du même côté de O, donc $k > 0$: $k = 2{,}5$.

b) $|k| = 2{,}5 > 1$: c'est un **agrandissement**. Toutes les longueurs de la figure sont multipliées par 2,5.

Réponse. a) $k = 2{,}5$ · b) agrandissement.

Correction de l'exercice 5 – Longueurs d'une figure image

Toutes les longueurs sont multipliées par $|k| = 0{,}6$.

— $A'B' = 0{,}6 \times 5 = 3$ cm.
— $B'C' = 0{,}6 \times 7 = 4{,}2$ cm.
— $A'C' = 0{,}6 \times 4 = 2{,}4$ cm.
— Périmètre image : $3 + 4{,}2 + 2{,}4 = 9{,}6$ cm.
— Contrôle : le périmètre initial vaut $5 + 7 + 4 = 16$ cm, et $0{,}6 \times 16 = 9{,}6$ cm. Le périmètre est donc lui aussi multiplié par k.

Réponse. 3 cm, 4,2 cm, 2,4 cm ; périmètre 9,6 cm.

Correction de l'exercice 6 – Effet sur une aire

a) Règle du cours : les aires sont multipliées par k^2.

— $k^2 = 3^2 = 9$, donc l'aire image vaut $9 \times 12 = 108$ cm².

b) Avec $k = -3$: $k^2 = (-3)^2 = 9$ également.

— L'aire est la même, 108 cm² : le signe du rapport change la **position** de la figure, pas ses dimensions.

Piège. Multiplier les longueurs par 3 ne multiplie pas l'aire par 3 mais par 9.

Réponse. a) 108 cm² · b) 108 cm² aussi.

Correction de l'exercice 7 – Effet sur un volume

a) Une homothétie de rapport k multiplie les volumes par k^3. Ici $k = 2$, donc les volumes sont multipliés par $2^3 = 8$:

$$8 \times 40 = 320 \text{ cm}^3$$

b) On cherche k tel que $k^3 = 27$. Comme $3 \times 3 \times 3 = 27$, il faut $k = 3$: tripler les longueurs multiplie le volume par 27 (et les aires par 9).

Piège : multiplier le volume par 2 seulement. Un cube de 1 cm d'arête agrandi au double a 2 cm d'arête et contient 8 cubes de 1 cm³.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) 320 cm³ · b) $k = 3$.

Correction de l'exercice 8 – Reconnaître une transformation

a) $k = 1$: chaque point est sa propre image, la figure est **inchangée**.

b) $k = -1$: O est le milieu de $[MM']$ pour tout point M : c'est la **symétrie centrale** de centre O. Les longueurs sont conservées.

c) $k = \frac{1}{2}$: **réduction** de rapport $\frac{1}{2}$ (les longueurs sont divisées par 2, les aires par 4).

d) $k = -4$: **agrandissement** de rapport 4 avec retournement (la figure image est de l'autre côté de O).

Réponse. a) identité · b) symétrie centrale · c) réduction $\frac{1}{2}$ · d) agrandissement ×4 retourné.

Correction de l'exercice 9 – Image d'un segment, rapport négatif

a) Une homothétie de rapport k multiplie toutes les longueurs par $|k| = 1{,}5$, y compris les distances au centre :

$$OA' = 1{,}5 \times 2 = 3 \text{ cm} \qquad OB' = 1{,}5 \times 3 = 4{,}5 \text{ cm} \qquad A'B' = 1{,}5 \times 2{,}5 = 3{,}75 \text{ cm}$$

Le rapport étant négatif, A' et B' sont de l'autre côté de O par rapport à A et B.

b) L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle : $(A'B') \parallel (AB)$. La figure image est retournée, mais les directions sont conservées.

Réponse. a) $OA' = 3$ cm, $OB' = 4{,}5$ cm, $A'B' = 3{,}75$ cm · b) elles sont parallèles.

Correction de l'exercice 10 – Reconnaître une homothétie

a) Les points sont sur les demi-droites issues de O, donc les rapports cherchés sont positifs. On compare :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \qquad \frac{OB'}{OB} = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5$$

Les deux quotients sont égaux : l'homothétie de centre O et de rapport 2,5 transforme A en A' et B en B'. C'est un agrandissement.

b) Les longueurs sont multipliées par 2,5 : $A'B' = 2{,}5 \times 2{,}2 = 5{,}5$ cm. De plus, $(A'B')$ est parallèle à (AB).

Réponse. a) Oui, de rapport 2,5 · b) $A'B' = 5{,}5$ cm.

Correction de l'exercice 11 – Une réduction de rapport 0,4

a) La valeur absolue du rapport vaut $0{,}4 < 1$: c'est une **réduction**.

b) Le périmètre est une longueur, il est multiplié par 0,4 : $0{,}4 \times 30 = 12$ cm. L'aire est multipliée par le carré du rapport :

$$0{,}4^2 = 0{,}16 \quad \text{et} \quad 0{,}16 \times 50 = 8 \text{ cm}^2$$

Piège : multiplier l'aire par 0,4 donnerait 20 cm², deux fois et demie trop. Le triangle image n'occupe que 16 % de l'aire de départ.

Réponse. a) Une réduction · b) périmètre 12 cm, aire 8 cm².

Correction de l'exercice 12 – Agrandir un logo

a) Le rapport est le quotient des largeurs :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$k = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

b) Pour ne pas déformer le logo, la hauteur est multipliée par le même nombre : $2{,}5 \times 3 = 7{,}5$ cm.

c) L'aire est multipliée par $k^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$. **Contrôle** : elle passe de $4 \times 3 = 12$ cm² à $10 \times 7{,}5 = 75$ cm², et $75 \div 12 = 6{,}25$.

Réponse. a) 2,5 · b) 7,5 cm · c) 6,25.

Correction de l'exercice 13 – Problème : une maquette

L'échelle $\frac{1}{50}$ correspond à une homothétie de rapport $k = \frac{1}{50} = 0{,}02$.

a) 12 m = 1 200 cm, donc la maquette mesure $\frac{1\,200}{50} = 24$ cm.

b) On remonte à la réalité en multipliant par 50 : $2{,}4 \times 50 = 120$ cm, soit 1,20 m.

c) Les aires sont multipliées par $k^2 = \frac{1}{2\,500}$.

— 60 m² = $60 \times 10\,000 = 600\,000$ cm².

— Aire sur la maquette : $\frac{600\,000}{2\,500} = 240$ cm².

Réponse. a) 24 cm · b) 1,20 m · c) 240 cm².

Correction de l'exercice 14 – Problème : photocopie agrandie

Un agrandissement de 140 % correspond à $k = 1{,}4$.

a) $12 \times 1{,}4 = 16{,}8$ cm.

b) Les aires sont multipliées par $k^2 = 1{,}4^2 = 1{,}96$.

— L'aire augmente donc de 96 % (elle est presque doublée).

c) Il faut le rapport inverse : $\frac{1}{1{,}4} \approx 0{,}714$, soit un réglage d'environ 71 %.

— Contrôle : $1{,}4 \times 0{,}714 \approx 1$: on retrouve bien la taille initiale.

Réponse. a) 16,8 cm · b) +96 % · c) environ 71 %.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un triangle et son image

a) Les distances au centre sont multipliées par 2,5 : $OA' = 10$ cm et $OB' = 7{,}5$ cm. Par le théorème de Pythagore dans OAB, rectangle en O : $AB^2 = 16 + 9 = 25$, donc $AB = 5$ cm, et $A'B' = 2{,}5 \times 5 = 12{,}5$ cm.

b) Le périmètre de OAB vaut $4 + 3 + 5 = 12$ cm, celui de $OA'B'$ vaut $10 + 7{,}5 + 12{,}5 = 30$ cm. Il a été multiplié par 2,5, comme toutes les longueurs.

c) L'aire de OAB vaut

$$\frac{OA \times OB}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

Sur l'image, directement : $\frac{10 \times 7{,}5}{2} = 37{,}5$ cm². Par la règle du cours, l'aire est multipliée par $2{,}5^2 = 6{,}25$: $6 \times 6{,}25 = 37{,}5$ cm². Les deux calculs concordent.

Réponse. a) $OA' = 10$, $OB' = 7{,}5$, $AB = 5$, $A'B' = 12{,}5$ cm ; b) 12 puis 30 cm, multiplié par 2,5 ; c) 6 puis 37,5 cm² (multipliée par 6,25).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).