

Plaquette 1 - Rapport, images et effets sur les mesures

Homothéties — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition et propriétés du cours.

- L'**homothétie** de centre O et de rapport k (non nul) associe au point M le point M' tel que O, M, M' soient alignés et $OM' = |k| \times OM$.
- Signe du rapport : si $k > 0$, M' est du **même côté** de O que M ; si $k < 0$, il est de l'**autre côté**.
- $|k| > 1$: **agrandissement**. $|k| < 1$: **réduction**. $k = 1$: rien ne change. $k = -1$: c'est la **symétrie centrale** de centre O .
- En coordonnées, avec un centre $O(x_O; y_O)$:

$$x_{M'} = x_O + k(x_M - x_O) \quad y_{M'} = y_O + k(y_M - y_O)$$

- Effets sur les mesures : longueurs $\times |k|$, **aires** $\times k^2$, **volumes** $\times k^3$.
- Une homothétie conserve les angles, le parallélisme et les alignements : l'image d'une figure lui est **semblable**.
- Échelle d'une maquette : échelle = $\frac{\text{longueur sur la maquette}}{\text{longueur réelle}}$ (mêmes unités).

Correction de l'exercice 1 - Image d'un point, centre à l'origine

Avec un centre à l'origine, la formule se simplifie : on multiplie les deux coordonnées par k .

- $A'(2 \times 3; 2 \times (-1)) = (6; -2)$.
- $B'(2 \times (-2); 2 \times 4) = (-4; 8)$.
- Contrôle : $OA' = 2 \times OA$ et les points O, A, A' sont alignés, du même côté car $k > 0$.

Réponse. $A'(6; -2)$ et $B'(-4; 8)$.

Correction de l'exercice 2 - Centre quelconque

On applique la formule du cours coordonnée par coordonnée.

- Abscisse : $x_{A'} = 1 + 3 \times (2 - 1) = 1 + 3 = 4$.
- Ordonnée : $y_{A'} = 2 + 3 \times (4 - 2) = 2 + 6 = 8$.
- Donc $A'(4; 8)$.
- Contrôle : $OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $OA' = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. On a bien $OA' = 3 \times OA$.

Réponse. $A'(4; 8)$.

Correction de l'exercice 3 - Rapport négatif

- On multiplie les coordonnées par -2 : $B'(-4; -6)$.
- Comme $k < 0$, le point B' est de l'**autre côté** de O par rapport à B : O se trouve entre B et B' .
- Comme $|k| = 2 > 1$, c'est un agrandissement : $OB' = 2 \times OB$.

Réponse. $B'(-4; -6)$, de l'autre côté de O .

Correction de l'exercice 4 - Retrouver le rapport

a) La relation du cours donne $OA' = |k| \times OA$, donc

$$|k| = \frac{OA'}{OA} = \frac{7,5}{3} = 2,5$$

— A et A' sont du même côté de O , donc $k > 0 : k = 2,5$.

b) $|k| = 2,5 > 1$: c'est un **agrandissement**. Toutes les longueurs de la figure sont multipliées par 2,5.

Réponse. a) $k = 2,5$ · b) agrandissement.

Correction de l'exercice 5 - Longueurs d'une figure image

Toutes les longueurs sont multipliées par $|k| = 0,6$.

— $A'B' = 0,6 \times 5 = 3$ cm.

— $B'C' = 0,6 \times 7 = 4,2$ cm.

— $A'C' = 0,6 \times 4 = 2,4$ cm.

— Périmètre image : $3 + 4,2 + 2,4 = 9,6$ cm.

— Contrôle : le périmètre initial vaut $5 + 7 + 4 = 16$ cm, et $0,6 \times 16 = 9,6$ cm. Le périmètre est donc lui aussi multiplié par k .

Réponse. 3 cm, 4,2 cm, 2,4 cm ; périmètre 9,6 cm.

Correction de l'exercice 6 - Effet sur une aire

a) Règle du cours : les aires sont multipliées par k^2 .

— $k^2 = 3^2 = 9$, donc l'aire image vaut $9 \times 12 = 108$ cm².

b) Avec $k = -3 : k^2 = (-3)^2 = 9$ également.

— L'aire est la même, 108 cm² : le signe du rapport change la **position** de la figure, pas ses dimensions.

Piège. Multiplier les longueurs par 3 ne multiplie pas l'aire par 3 mais par 9.

Réponse. a) 108 cm² · b) 108 cm² aussi.

Correction de l'exercice 7 - Effet sur un volume

a) Les volumes sont multipliés par $k^3 = 2^3 = 8$.

— Volume image : $8 \times 40 = 320$ cm³.

b) On cherche k tel que $k^3 = 27$.

— $3^3 = 27$, donc $k = 3$.

— Autrement dit, tripler les longueurs multiplie le volume par 27.

Réponse. a) 320 cm³ · b) $k = 3$.

Correction de l'exercice 8 - Reconnaître une transformation

a) $k = 1$: chaque point est sa propre image, la figure est **inchangée**.

b) $k = -1$: O est le milieu de $[MM']$ pour tout point M : c'est la **symétrie centrale** de centre O . Les longueurs sont conservées.

c) $k = \frac{1}{2}$: **réduction** de rapport $\frac{1}{2}$ (les longueurs sont divisées par 2, les aires par 4).

d) $k = -4$: **agrandissement** de rapport 4 avec retournement (la figure image est de l'autre côté de O).

Réponse. a) identité · b) symétrie centrale · c) réduction $\frac{1}{2}$ · d) agrandissement $\times 4$ retourné.

Correction de l'exercice 9 - Problème : une maquette

L'échelle $\frac{1}{50}$ correspond à une homothétie de rapport $k = \frac{1}{50} = 0,02$.

a) $12 \text{ m} = 1\,200 \text{ cm}$, donc la maquette mesure $\frac{1\,200}{50} = 24 \text{ cm}$.

b) On remonte à la réalité en multipliant par 50 : $2,4 \times 50 = 120 \text{ cm}$, soit $1,20 \text{ m}$.

c) Les aires sont multipliées par $k^2 = \frac{1}{2\,500}$.

— $60 \text{ m}^2 = 60 \times 10\,000 = 600\,000 \text{ cm}^2$.

— Aire sur la maquette : $\frac{600\,000}{2\,500} = 240 \text{ cm}^2$.

Réponse. a) 24 cm · b) $1,20 \text{ m}$ · c) 240 cm^2 .

Correction de l'exercice 10 - Problème : photocopie agrandie

Un agrandissement de 140 % correspond à $k = 1,4$.

a) $12 \times 1,4 = 16,8 \text{ cm}$.

b) Les aires sont multipliées par $k^2 = 1,4^2 = 1,96$.

— L'aire augmente donc de 96 % (elle est presque doublée).

c) Il faut le rapport inverse : $\frac{1}{1,4} \approx 0,714$, soit un réglage d'environ 71 %.

— Contrôle : $1,4 \times 0,714 \approx 1$: on retrouve bien la taille initiale.

Réponse. a) $16,8 \text{ cm}$ · b) $+96 \%$ · c) environ 71 %.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : coordonnées et aires

a) Le centre étant l'origine, on multiplie les coordonnées par 2,5 :

— $A'(10; 0)$ et $B'(0; 7,5)$.

b) Le triangle OAB est rectangle en O : son aire vaut

$$A = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

— **Première méthode** (calcul direct sur l'image) : $\frac{OA' \times OB'}{2} = \frac{10 \times 7,5}{2} = 37,5$.

— **Seconde méthode** (règle du cours) : l'aire est multipliée par $k^2 = 2,5^2 = 6,25$, donc $6 \times 6,25 = 37,5$.

— Les deux méthodes donnent le même résultat, ce qui confirme la règle des aires.

Réponse. a) $A'(10; 0)$, $B'(0; 7,5)$ · b) 6 puis 37,5 (rapport $k^2 = 6,25$).