Plaquette 4 – Homothéties et configurations de Thalès

Homothéties — Troisième

Exercices

Méthode

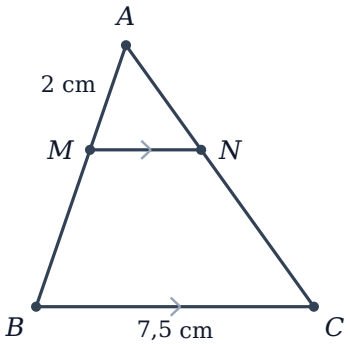
Dans une configuration de Thalès, le petit triangle est l'image du grand par une homothétie dont le centre est le sommet commun : en configuration « triangle », le rapport est positif ; en configuration « papillon », il est négatif. On reconnaît l'homothétie, on calcule son rapport à partir de deux longueurs, puis on l'utilise pour calculer des longueurs, des périmètres et des aires.

Exercice 1 – Reconnaître l'homothétie dans un triangle

Dans le triangle ABC, M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, avec $(MN) \parallel (BC)$. On donne $AM = 2$ cm, $AB = 5$ cm et $BC = 7{,}5$ cm.

a) Par quelle homothétie le triangle AMN est-il l'image du triangle ABC ? Préciser le centre et le rapport.

b) En déduire la longueur MN.



(MN) est parallèle à (BC)

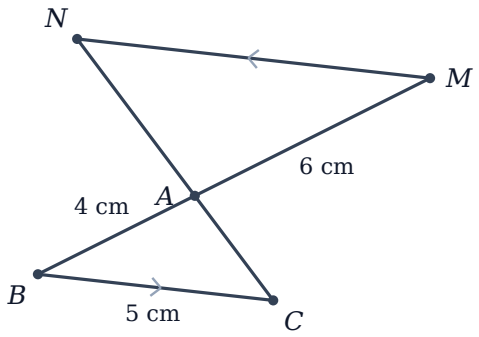
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – La configuration papillon

Les droites (BM) et (CN) se coupent en A, avec A entre B et M et entre C et N, et $(MN) \parallel (BC)$. On donne $AB = 4$ cm, $AM = 6$ cm et $BC = 5$ cm.

a) Quelle homothétie transforme le triangle ABC en AMN ? Donner son rapport.

b) Calculer MN.



Configuration papillon de centre A

Exercice 3 – Agrandissement ou réduction ?

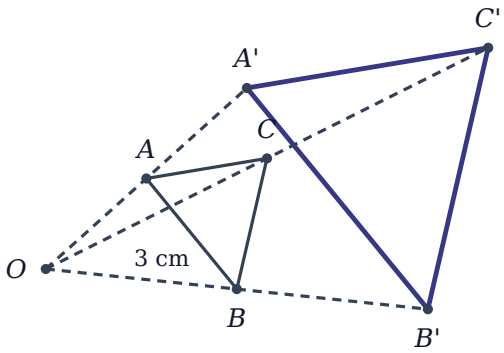
Pour chaque rapport, dire si l'homothétie est un agrandissement ou une réduction, et si l'image est du même côté du centre ou de l'autre côté : $k = 3$; $k = 0{,}5$; $k = -2$; $k = -0{,}25$; $k = -1$; $k = 1$.

Exercice 4 – Retrouver le rapport

Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC par une homothétie de centre O. On mesure $AB = 3$ cm et $A'B' = 6$ cm, et l'on constate que A' est sur la demi-droite $[OA)$.

a) Déterminer le rapport de l'homothétie.

b) On sait que $BC = 2{,}5$ cm et $OC = 4$ cm. Calculer $B'C'$ et OC'.

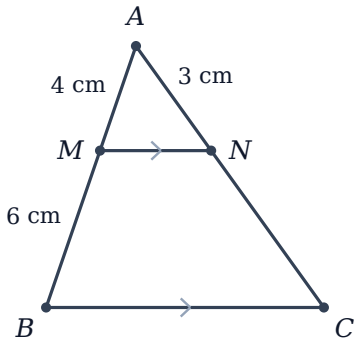


Le triangle ABC et son image A'B'C'

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Utiliser l'homothétie pour une longueur inconnue

Dans un triangle ABC, M est sur $[AB]$ et N sur $[AC]$, avec $(MN) \parallel (BC)$. On donne $AM = 4$ cm, $MB = 6$ cm et $AN = 3$ cm. Calculer AC, puis NC.



$(MN) \parallel (BC)$

Exercice 6 – Image d'un point sur une droite

Sur une droite, on place un point O et un point A tels que $OA = 2$ cm. On note A' l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

a) Calculer OA' et AA'.

b) Même question pour le rapport -3, en notant A'' l'image.

c) Que peut-on dire du point O par rapport à A' et A'' ?



Le point A et son image A′ (rapport 3)

Exercice 7 – Ce qu'une homothétie conserve

Le parallélogramme $A'B'C'D'$ est l'image du parallélogramme $ABCD$ par une homothétie de rapport -2. On sait que $AB = 3$ cm, $BC = 2$ cm et $A\hat{B}C = 70°$. Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

a) $A'B' = 6$ cm.

b) $A'\hat{B}'C' = 140°$.

c) $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

d) L'aire de $A'B'C'D'$ est le double de celle de $ABCD$.

Exercice 8 – Périmètre et aire de l'image

Un triangle rectangle a des côtés de 3 cm, 4 cm et 5 cm. On lui applique une homothétie de rapport 2,5.

a) Calculer le périmètre du triangle image.

b) Calculer l'aire du triangle de départ, puis celle du triangle image.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Remonter du rapport des aires

Une figure de 12 cm² a pour image, par une homothétie, une figure de 75 cm². L'image est située de l'autre côté du centre.

a) Calculer le rapport de l'homothétie.

b) Un segment de la figure de départ mesure 4 cm. Combien mesure son image ?

Exercice 10 – Deux homothéties de même centre

On applique à un segment $[AB]$ de 2 cm l'homothétie de centre O et de rapport 2, puis, au segment obtenu, l'homothétie de même centre O et de rapport -3.

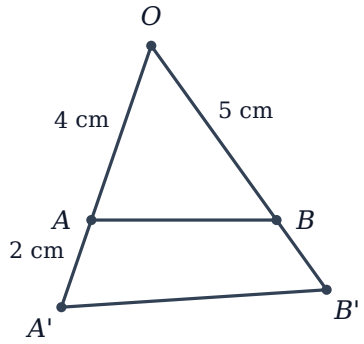
a) Quelle est la longueur du segment final ?

b) Par quelle homothétie unique peut-on passer directement de $[AB]$ au segment final ?

c) Le segment final est-il du même côté de O que $[AB]$?

Exercice 11 – Est-ce une homothétie ?

Sur une figure, les points A et A' sont alignés avec O, ainsi que B et B', chaque image étant du même côté de O que son point de départ. On mesure $OA = 4$ cm, $OA' = 6$ cm, $OB = 5$ cm et $OB' = 7$ cm. Peut-il exister une homothétie de centre O qui envoie A sur A' et B sur B' ?



Les points A' et B'

Exercice 12 – Image d'un cercle

Un cercle C a pour centre I et pour rayon 3 cm. On lui applique l'homothétie de centre O et de rapport -2.

a) Quelle est la nature de la figure image ? Préciser son rayon.

b) Où se trouve son centre ?

c) Comparer les périmètres et les aires des deux disques.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

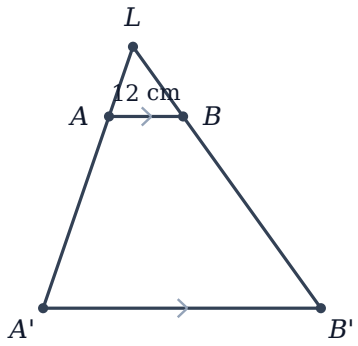
Exercice 13 – Une ombre portée

Une lampe ponctuelle L éclaire une figurine verticale $[AB]$ de 12 cm de haut, placée à 80 cm de la lampe. Son ombre $[A'B']$ se forme sur un mur parallèle à la figurine, à 3 m de la lampe. On admet que l'ombre est l'image de la figurine par l'homothétie de centre L.

a) Calculer le rapport de cette homothétie.

b) Quelle est la hauteur de l'ombre ?

c) On remplace la figurine par une carte rectangulaire de 10 cm sur 6 cm, au même endroit. Quelle est l'aire de son ombre ?



La lampe L, la figurine $[AB]$ et son ombre $[A'B']$

Exercice 14 – Repérer une erreur

Un élève écrit : « Un triangle a une aire de 8 cm². Par une homothétie de rapport -3, son image a une aire de $8 \times (-3) = -24$ cm². » Repérer les erreurs et corriger.

Exercice 15 – Synthèse : un triangle et deux homothéties

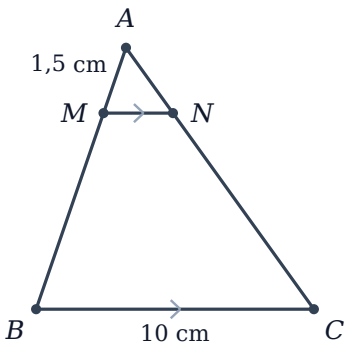
Dans le triangle ABC, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 10$ cm. Le point M est sur $[AB]$ avec $AM = 1{,}5$ cm, et la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N.

a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b) Par quelle homothétie AMN est-il l'image de ABC ? Calculer AN et MN.

c) Calculer les aires des triangles ABC et AMN. Vérifier la règle des aires.

d) Sur la demi-droite opposée à $[AB]$, on place P avec $AP = 3$ cm ; la parallèle à (BC) passant par P coupe la droite (AC) en Q. Par quelle homothétie APQ est-il l'image de ABC ? Calculer PQ.



$(MN) \parallel (BC)$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).