

Plaque 2 - Calculer des images : automatismes

Notion de fonction — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La notation. $f: x \mapsto 3x - 5$ et $f(x) = 3x - 5$ désignent la même fonction. On lit « f de x », jamais « f fois x ».

Écriture	Signification
$f(2) = 1$	l'image de 2 est 1
$f(a) = b$	b est l'image de a , a est un antécédent de b
$f: 2 \mapsto 1$	même information que $f(2) = 1$

La méthode en trois gestes.

- Recopier l'expression de f .
- Remplacer chaque x par la valeur, **entre parenthèses** si elle est négative.
- Effectuer en respectant les priorités.

Les parenthèses obligatoires. Pour $f(x) = x^2 - 3x$ et $x = -2$:

$$f(-2) = (-2)^2 - 3 \times (-2) = 4 + 6 = 10$$

Sans parenthèses, -2^2 vaudrait -4 : le résultat serait faux.

Priorités opératoires.

Ordre	Opération
1	parenthèses
2	puissances et carrés
3	multiplications et divisions
4	additions et soustractions

Un tableau de valeurs. Une ligne pour x , une ligne pour $f(x)$: chaque colonne est un couple image-antécédent. Il se remplit en calculant une image par colonne.

Contrôle. Une image dépend de la valeur choisie : deux x différents peuvent donner la même image, mais un même x ne donne **jamais** deux images.

Correction de l'exercice 1 - Une fonction affine

- **Calcul de $f(0)$:** $4 \times 0 - 7$ ✓
- **Résultat :** -7 ✓
- **Calcul de $f(3)$:** $12 - 7$ ✓
- **Résultat :** 5 ✓
- **Calcul de $f(-2)$:** $4 \times (-2) - 7$ ✓
- **Produit :** -8 ✓
- **Résultat :** -15 ✓
- **Attention :** les deux termes sont négatifs, ils s'ajoutent en valeur absolue ✓
- **Calcul de $f(0,5)$:** $4 \times 0,5 - 7$ ✓

- **Produit** : 2 ✓
- **Résultat** : -5 ✓
- **Bilan** :

$$f(0) = -7 \quad f(3) = 5 \quad f(-2) = -15 \quad f(0,5) = -5$$

- **Observation** : quand x augmente, $f(x)$ augmente ✓
- **Contrôle de la régularité** : de $x = 0$ à $x = 3$, l'image gagne 12 ✓
- **Vérification** : $3 \times 4 = 12$ ✓
- **Interprétation** : chaque unité gagnée par x ajoute 4 à l'image ✓
- **Image de 1** : -3 ✓

Réponse. $f(0) = -7 \cdot f(3) = 5 \cdot f(-2) = -15 \cdot f(0,5) = -5$.

Correction de l'exercice 2 - Une fonction avec un carré

- **Calcul de $g(0)$** : $0 - 0$ ✓
- **Résultat** : 0 ✓
- **Calcul de $g(2)$** : $2^2 - 3 \times 2$ ✓
- **Carré** : 4 ✓
- **Produit** : 6 ✓
- **Résultat** : -2 ✓
- **Calcul de $g(-1)$** : $(-1)^2 - 3 \times (-1)$ ✓
- **Carré** : 1 ✓
- **Attention** : le carré d'un négatif est **positif** ✓
- **Second terme** : $-3 \times (-1) = +3$ ✓
- **Résultat** : 4 ✓
- **Calcul de $g(5)$** : $25 - 15$ ✓
- **Résultat** : 10 ✓
- **Bilan** :

$$g(0) = 0 \quad g(2) = -2 \quad g(-1) = 4 \quad g(5) = 10$$

- **Observation** : les images ne varient pas régulièrement ✓
- **Conséquence** : g n'est **pas** une fonction affine ✓
- **Erreur classique** : écrire $g(-1) = -1 - 3 = -4$ ✓
- **Cause** : oubli des parenthèses autour de -1 ✓
- **Autre image** : $g(3) = 9 - 9 = 0$ ✓
- **Remarque** : 0 et 3 ont donc la **même** image ✓

Réponse. $g(0) = 0 \cdot g(2) = -2 \cdot g(-1) = 4 \cdot g(5) = 10$.

Correction de l'exercice 3 - Une expression avec parenthèses

- a) **Calcul de $h(1)$** : $2(1 - 3) + 5$ ✓
- **Parenthèse** : -2 ✓
- **Produit** : -4 ✓
- **Résultat** : 1 ✓
- **Calcul de $h(4)$** : $2(4 - 3) + 5$ ✓
- **Parenthèse** : 1 ✓
- **Résultat** : 7 ✓
- **Calcul de $h(-2)$** : $2(-2 - 3) + 5$ ✓

— **Parenthèse** : -5 ✓

— **Produit** : -10 ✓

— **Résultat** : -5 ✓

b) **Développement** : $2x - 6 + 5$ ✓

— **Forme réduite** :

$$h(x) = 2x - 1$$

— **Contrôle pour** $x = 1$: $2 - 1 = 1$ ✓

— **Contrôle pour** $x = 4$: $8 - 1 = 7$ ✓

— **Contrôle pour** $x = -2$: $-4 - 1 = -5$ ✓

— **Concordance des trois valeurs** ✓

— **Conclusion** : les deux écritures définissent la **même** fonction ✓

— **Avantage de la forme réduite** : les calculs sont plus rapides ✓

— **Nature de la fonction** : affine, de coefficient 2 ✓

— **Image de 0** : -1 ✓

Réponse. a) $h(1) = 1$, $h(4) = 7$, $h(-2) = -5$ · b) $h(x) = 2x - 1$.

Correction de l'exercice 4 - Coefficient négatif

— **Calcul de** $f(0)$: $0 + 9$ ✓

— **Résultat** : 9 ✓

— **Calcul de** $f(-3)$: $-2 \times (-3) + 9$ ✓

— **Produit** : $+6$ ✓

— **Règle** : le produit de deux négatifs est positif ✓

— **Résultat** : 15 ✓

— **Calcul de** $f(4,5)$: $-9 + 9$ ✓

— **Résultat** : 0 ✓

— **Interprétation** : 4,5 a pour image 0 ✓

— **Calcul de** $f(10)$: $-20 + 9$ ✓

— **Résultat** : -11 ✓

— **Bilan** :

$$f(0) = 9 \quad f(-3) = 15 \quad f(4,5) = 0 \quad f(10) = -11$$

— **Observation** : quand x augmente, $f(x)$ **diminue** ✓

— **Cause** : le coefficient de x est négatif ✓

— **Contrôle de la régularité** : de $x = 0$ à $x = 10$, l'image perd 20 ✓

— **Vérification** : $10 \times 2 = 20$ ✓

— **Image de 1** : 7 ✓

— **Image de 2** : 5 ✓

— **Écart constant** : -2 par unité ✓

Réponse. $f(0) = 9$ · $f(-3) = 15$ · $f(4,5) = 0$ · $f(10) = -11$.

Correction de l'exercice 5 - Compléter un tableau

— **Calcul pour** $x = -3$: $(-3)^2 - 4$ ✓

— **Carré** : 9 ✓

— **Image** : 5 ✓

— **Calcul pour** $x = -1$: $1 - 4$ ✓

- **Image** : -3 ✓
- **Calcul pour** $x = 0$: $0 - 4$ ✓
- **Image** : -4 ✓
- **Calcul pour** $x = 2$: $4 - 4$ ✓
- **Image** : 0 ✓
- **Calcul pour** $x = 4$: $16 - 4$ ✓
- **Image** : 12 ✓
- **Tableau obtenu** ✓

x	-3	-1	0	2	4
$f(x)$	5	-3	-4	0	12

- **Observation** : l'image la plus petite est -4 ✓
- **Valeur qui la donne** : $x = 0$ ✓
- **Explication** : x^2 est toujours positif ou nul ✓
- **Conséquence** : $f(x) \geq -4$ pour tout x ✓
- **Contrôle** : $f(-2) = 0$ également ✓
- **Remarque** : 2 et -2 ont la même image ✓

Réponse. $5 \cdot -3 \cdot -4 \cdot 0 \cdot 12$.

Correction de l'exercice 6 - Images de nombres opposés

- a) **Calcul de** $f(3)$: 9 ✓
- **Calcul de** $f(-3)$: $(-3)^2 = 9$ ✓
- **Calcul de** $f(5)$: 25 ✓
- **Calcul de** $f(-5)$: $(-5)^2 = 25$ ✓
- b) **Remarque** : deux nombres opposés ont la **même** image ✓
- **Écriture générale** : $f(-a) = (-a)^2$ ✓
- **Développement** : $(-a) \times (-a)$ ✓
- **Règle des signes** : le produit de deux négatifs est positif ✓
- **Résultat** :

$$f(-a) = a^2 = f(a)$$

- **Conclusion** : la propriété est vraie pour **tout** nombre ✓
- **Contrôle avec** $a = 0,5$: $0,25$ dans les deux cas ✓
- **Contrôle avec** $a = 10$: 100 dans les deux cas ✓
- **Conséquence graphique** : la courbe est **symétrique** par rapport à l'axe des ordonnées ✓
- **Nom de cette courbe** : une parabole ✓
- **Image la plus petite** : 0 , atteinte en $x = 0$ ✓
- **Existe-t-il une image négative ?** Non ✓
- **Raison** : un carré n'est jamais négatif ✓
- **Contre-exemple pour une fonction affine** : $g(x) = 2x$ ✓
- **Contrôle** : $g(3) = 6$ et $g(-3) = -6$, valeurs différentes ✓

Réponse. a) $9, 9, 25, 25$ · b) $f(-a) = f(a)$: deux opposés ont la même image.

Correction de l'exercice 7 - Comparer une image et son antécédent

- **Calcul de $f(0,5)$** : $0,25 - 0,5$ ✓
- **Résultat** : $-0,25$ ✓
- **Comparaison** : $-0,25 < 0,5$ ✓
- **Conclusion** : l'image est plus petite ✓
- **Calcul de $f(2)$** : $4 - 2$ ✓
- **Résultat** : 2 ✓
- **Comparaison** : $2 = 2$ ✓
- **Conclusion** : l'image est **égale** à l'antécédent ✓
- **Calcul de $f(3)$** : $9 - 3$ ✓
- **Résultat** : 6 ✓
- **Comparaison** : $6 > 3$ ✓
- **Conclusion** : l'image est plus grande ✓
- **Bilan** : les trois situations sont possibles ✓
- **Recherche des cas d'égalité** : $x^2 - x = x$ ✓
- **Passage à zéro** : $x^2 - 2x = 0$ ✓
- **Factorisation** :

$$x(x - 2) = 0$$

- **Solutions** : $x = 0$ ou $x = 2$ ✓
- **Contrôle pour $x = 0$** : $f(0) = 0$ ✓
- **Conclusion** : seuls 0 et 2 sont leur propre image ✓

Réponse. $f(0,5) < 0,5$; $f(2) = 2$; $f(3) > 3$; l'égalité n'a lieu qu'en 0 et 2.

Correction de l'exercice 8 - Affine ou non ?

- **Définition** : une fonction affine s'écrit $ax + b$ ✓
- **Test de f** : $a = 3$ et $b = -1$ ✓
- **Verdict** : **affine** ✓
- **Test de g** : la variable est au carré ✓
- **Verdict** : **non** affine ✓
- **Contrôle** : $g(1) = 1$, $g(2) = 4$, $g(3) = 9$ ✓
- **Écarts successifs** : 3 puis 5 ✓
- **Constat** : ils ne sont pas constants ✓
- **Test de h** : on peut écrire $h(x) = 0 \times x + 5$ ✓
- **Verdict** : **affine**, et même **constante** ✓
- **Contrôle** : toutes les images valent 5 ✓
- **Test de k** : on développe ✓
- **Réécriture** :

$$k(x) = 0,5x + 1,5$$

- **Verdict** : **affine** ✓
- **Contrôle** : $k(1) = 2$, $k(3) = 3$, $k(5) = 4$ ✓
- **Écarts successifs** : 1 puis 1 ✓
- **Constat** : ils sont constants ✓
- **Bilan** : f , h et k sont affines, g ne l'est pas ✓

- **Test rapide** : pour une fonction affine, des x régulièrement espacés donnent des images régulièrement espacées ✓

Réponse. f , h et k sont affines ; g ne l'est pas.

Correction de l'exercice 9 - D'un programme à une fonction

a) **Après la multiplication par 3** : $3x$ ✓

- **Après l'addition** : $3x + 2$ ✓
- **Après la seconde multiplication** : $2(3x + 2)$ ✓
- **Expression de la fonction** : $f(x) = 2(3x + 2)$ ✓
- **Développement** :

$$f(x) = 6x + 4$$

- **Nature** : fonction affine ✓

b) **Calcul de $f(5)$ par le programme** : $3 \times 5 = 15$ ✓

- **Puis** : $15 + 2 = 17$ ✓
- **Puis** : $17 \times 2 = 34$ ✓
- **Image de 5** :

$$34$$

- **Contrôle par la formule** : $30 + 4 = 34$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Calcul de $f(-1)$ par la formule** : $-6 + 4$ ✓
- **Image de -1** :

$$-2$$

- **Contrôle par le programme** : $3 \times (-1) = -3$ ✓
- **Puis** : $-3 + 2 = -1$ ✓
- **Puis** : $-1 \times 2 = -2$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Piège** : « ajouter 2 puis multiplier par 2 » n'est pas « multiplier par 2 puis ajouter 2 » ✓
- **Contrôle** : cette autre lecture donnerait $6x + 2$ ✓

Réponse. a) $f(x) = 6x + 4$ · b) $f(5) = 34$ et $f(-1) = -2$.

Correction de l'exercice 10 - Des images négatives

- **Calcul de $f(0)$** : $5 - 0$ ✓
- **Résultat** : 5 ✓
- **Calcul de $f(2)$** : $5 - 4$ ✓
- **Résultat** : 1 ✓
- **Calcul de $f(3)$** : $5 - 9$ ✓
- **Résultat** : -4 ✓
- **Calcul de $f(-3)$** : $5 - (-3)^2$ ✓
- **Carré** : 9 ✓
- **Résultat** : -4 ✓
- **Observation** : 3 et -3 ont la même image ✓
- **Image la plus grande** :

$$5$$

- **Valeur qui la donne** : $x = 0$ ✓
- **Argument** : $x^2 \geq 0$ pour tout x ✓
- **Conséquence** : $5 - x^2 \leq 5$ ✓
- **Conclusion** : 5 est bien le **maximum** ✓
- **Erreur classique** : écrire $f(-3) = 5 + 9 = 14$ ✓
- **Cause** : confondre $-x^2$ et $(-x)^2$ ✓
- **Contrôle** : $-(-3)^2 = -9$, et non $+9$ ✓
- **Images nulles** : pour $x^2 = 5$ ✓
- **Valeurs approchées** : $\pm 2,24$ ✓

Réponse. 5, 1, -4, -4 ; l'image maximale est 5, atteinte en $x = 0$.

Correction de l'exercice 11 - Deux fonctions à comparer

- **Calcul de $f(1)$** : $2 + 3 = 5$ ✓
- **Calcul de $g(1)$** : 1 ✓
- **Comparaison** : $5 > 1$ ✓
- **Conclusion** : $f(1) > g(1)$ ✓
- **Calcul de $f(3)$** : $6 + 3 = 9$ ✓
- **Calcul de $g(3)$** : 9 ✓
- **Comparaison** : les deux valent 9 ✓
- **Conclusion** : $f(3) = g(3)$ ✓
- **Calcul de $f(4)$** : $8 + 3 = 11$ ✓
- **Calcul de $g(4)$** : 16 ✓
- **Comparaison** : $11 < 16$ ✓
- **Conclusion** : $f(4) < g(4)$ ✓
- **Bilan** : la comparaison **change** selon la valeur de x ✓
- **Recherche des cas d'égalité** : $x^2 = 2x + 3$ ✓
- **Passage à zéro** : $x^2 - 2x - 3 = 0$ ✓
- **Factorisation** :

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

- **Contrôle du développement** : $x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3$ ✓
- **Solutions** : $x = 3$ ou $x = -1$ ✓
- **Contrôle pour $x = -1$** : $f(-1) = 1$ et $g(-1) = 1$ ✓

Réponse. $f(1) > g(1)$ · $f(3) = g(3)$ · $f(4) < g(4)$; égalité pour $x = 3$ et $x = -1$.

Correction de l'exercice 12 - Une fonction donnée par un tableau

- a) **Lecture directe** : on repère la colonne ✓
 - **Colonne de 1** : image 1 ✓
 - **Résultat** : $f(1) = 1$ ✓
 - **Colonne de 5** : image -2 ✓
 - **Résultat** : $f(5) = -2$ ✓
- b) **Recherche** : on cherche les cases où la seconde ligne vaut 3 ✓
 - **Première occurrence** : colonne de 0 ✓
 - **Seconde occurrence** : colonne de 3 ✓
 - **Antécédents de 3** :

0 et 3

- **Remarque** : un nombre peut avoir **plusieurs** antécédents ✓
- **Contraste** : une image, elle, est toujours unique ✓
- c) **Test** : de $x = -2$ à $x = 0$, l'écart de x vaut 2 ✓
- **Variation de l'image** : $3 - 7 = -4$ ✓
- **Taux** : -2 par unité ✓
- **De $x = 0$ à $x = 1$** : écart de 1 ✓
- **Variation** : $1 - 3 = -2$ ✓
- **Taux** : -2 par unité ✓
- **De $x = 1$ à $x = 3$** : écart de 2 ✓
- **Variation** : $3 - 1 = +2$ ✓
- **Taux** : $+1$ par unité ✓
- **Constat** : le taux a changé ✓
- **Conclusion** : f n'est **pas** affine ✓
- **Confirmation** : une fonction affine ne prend jamais deux fois la même valeur, sauf si elle est constante ✓

Réponse. a) $f(1) = 1$ et $f(5) = -2$ · b) 0 et 3 · c) non, le taux de variation change.

Correction de l'exercice 13 - Une forme factorisée

- **Calcul de $f(0)$** : $0 \times (-4)$ ✓
- **Résultat** : 0 ✓
- **Calcul de $f(4)$** : 4×0 ✓
- **Résultat** : 0 ✓
- **Observation** : deux antécédents de 0 ✓
- **Explication** : la forme factorisée les donne directement ✓
- **Calcul de $f(2)$** : $2 \times (-2)$ ✓
- **Résultat** : -4 ✓
- **Calcul de $f(6)$** : 6×2 ✓
- **Résultat** : 12 ✓
- **Calcul de $f(-1)$** : $(-1) \times (-5)$ ✓
- **Résultat** : 5 ✓
- **Bilan** :

$$f(0) = 0 \quad f(4) = 0 \quad f(2) = -4 \quad f(6) = 12 \quad f(-1) = 5$$

- **Forme développée** : $x^2 - 4x$ ✓
- **Contrôle pour $x = 6$** : $36 - 24 = 12$ ✓
- **Contrôle pour $x = -1$** : $1 + 4 = 5$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Image la plus petite parmi les valeurs calculées** : -4 ✓
- **Forme canonique** : $(x - 2)^2 - 4$ ✓
- **Contrôle** : $x^2 - 4x + 4 - 4 = x^2 - 4x$ ✓
- **Conclusion** : le minimum vaut -4 , atteint en $x = 2$ ✓

Réponse. $0 \cdot 0 \cdot -4 \cdot 12 \cdot 5$.

Correction de l'exercice 14 - L'aire d'un rectangle

a) **Aire** : longueur par largeur ✓

— **Expression** :

$$A(x) = x(x - 3)$$

— **Forme développée** : $x^2 - 3x$ ✓

b) **Calcul pour** $x = 5$: 5×2 ✓

— **Résultat** : 10 cm^2 ✓

— **Calcul pour** $x = 8$: 8×5 ✓

— **Résultat** : 40 cm^2 ✓

— **Calcul pour** $x = 10$: 10×7 ✓

— **Résultat** : 70 cm^2 ✓

— **Observation** : l'aire croît de plus en plus vite ✓

— **Écart de 5 à 8** : 30 cm^2 ✓

— **Écart de 8 à 10** : 30 cm^2 pour seulement 2 unités ✓

c) **Condition** : la largeur doit être strictement positive ✓

— **Inéquation** : $x - 3 > 0$ ✓

— **Solutions** :

$$x > 3$$

— **Contrôle pour** $x = 3$: largeur nulle, pas de rectangle ✓

— **Contrôle pour** $x = 2$: largeur -1 , impossible ✓

— **Contrôle pour** $x = 4$: largeur 1 , aire 4 cm^2 ✓

— **Conclusion** : la fonction n'a de sens géométrique que pour $x > 3$ ✓

— **Remarque** : mathématiquement, $A(2) = -2$ existe mais ne représente rien ✓

Réponse. a) $A(x) = x(x - 3)$ · b) $10, 40$ et 70 cm^2 · c) $x > 3$.

Correction de l'exercice 15 - Une température qui baisse

a) **Calcul de** $T(0)$: $18 - 0$ ✓

— **Température initiale** : 18 degrés ✓

— **Calcul de** $T(6)$: $18 - 3$ ✓

— **Résultat** : 15 degrés ✓

— **Calcul de** $T(20)$: $18 - 10$ ✓

— **Résultat** : 8 degrés ✓

— **Observation** : la température baisse régulièrement ✓

— **Taux** : $0,5$ degré par heure ✓

— **Contrôle** : en 6 h , la baisse vaut 3 degrés ✓

b) **Équation** : $18 - 0,5h = 10$ ✓

— **On retranche** 18 : $-0,5h = -8$ ✓

— **On divise par** $-0,5$:

$$h = 16 \text{ heures}$$

— **Vérification** : $18 - 8 = 10$ ✓

— **Contrôle à** 15 h : $18 - 7,5 = 10,5$ degrés ✓

— **Contrôle à** 17 h : $18 - 8,5 = 9,5$ degrés ✓

- **Cohérence** : la valeur 10 est bien atteinte entre 15 et 17 h ✓
- **Quand la température atteindrait-elle 0 ?** ✓
- **Équation** : $18 - 0,5h = 0$, donc $h = 36$ ✓
- **Limite du modèle** : une pièce ne refroidit pas indéfiniment ✓
- **Conclusion** : le modèle n'est valable que sur quelques heures ✓

Réponse. a) 18, 15 et 8 degrés · b) au bout de 16 heures.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : trois fonctions

a) **Calcul de $f(2)$** : $6 - 4$ ✓

- **Résultat** : 2 ✓
- **Calcul de $g(2)$** : $4 + 1$ ✓
- **Résultat** : 5 ✓
- **Calcul de $h(2)$** : 1×4 ✓
- **Résultat** :

4

b) **Calcul de $f(-3)$** : $-9 - 4$ ✓

- **Résultat** : -13 ✓
- **Calcul de $g(-3)$** : $9 + 1$ ✓
- **Résultat** : 10 ✓
- **Calcul de $h(-3)$** : $(-4) \times (-1)$ ✓
- **Résultat** :

4

— **Observation** : $h(2) = h(-3) = 4$ ✓

c) **Test de f** : $3 - 4 = -1$ ✓

- **Verdict** : non ✓
- **Test de g** : $1 + 1 = 2$ ✓
- **Verdict** : non ✓
- **Test de h** : $0 \times 3 = 0$ ✓
- **Verdict** :

c'est h

— **Explication** : la forme factorisée annonce les valeurs 1 et -2 ✓

— **Contrôle** : $h(-2) = (-3) \times 0 = 0$ ✓

d) **Test de f** : $f(0) = -4$, négatif ✓

- **Test de h** : $h(0) = (-1) \times 2 = -2$, négatif ✓
- **Test de g** : $x^2 \geq 0$ pour tout x ✓
- **Conséquence** : $x^2 + 1 \geq 1$ ✓
- **Verdict** :

c'est g

— **Image minimale de g** : 1, atteinte en $x = 0$ ✓

— **Conclusion** : g ne s'annule jamais ✓

Réponse. a) 2, 5, 4 · b) -13, 10, 4 · c) h · d) g .