Plaquette 2 – Calculer des images : automatismes

Notion de fonction — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La notation. $f : x \mapsto 3x - 5$ et $f(x) = 3x - 5$ désignent la même fonction. On lit « f de x », jamais « f fois x ».

Écriture	Signification
$f(2) = 1$	l'image de 2 est 1
$f(a) = b$	b est l'image de a, a est un antécédent de b
$f : 2 \mapsto 1$	même information que $f(2) = 1$

La méthode en trois gestes.

— Recopier l'expression de f.
— Remplacer chaque x par la valeur, **entre parenthèses** si elle est négative.
— Effectuer en respectant les priorités.

Les parenthèses obligatoires. Pour $f(x) = x^2 - 3x$ et $x = -2$:

$$f(-2) = (-2)^2 - 3 \times (-2) = 4 + 6 = 10$$

Sans parenthèses, -2^2 vaudrait -4 : le résultat serait faux.

Priorités opératoires.

Ordre	Opération
1	parenthèses
2	puissances et carrés
3	multiplications et divisions
4	additions et soustractions

Un tableau de valeurs. Une ligne pour x, une ligne pour $f(x)$: chaque colonne est un couple image-antécédent. Il se remplit en calculant une image par colonne.

Contrôle. Une image dépend de la valeur choisie : deux x différents peuvent donner la même image, mais un même x ne donne **jamais** deux images.

Correction de l'exercice 1 – Une fonction affine

Pour calculer une image, on remplace x par le nombre donné, puis on effectue d'abord la multiplication, ensuite la soustraction.

— $f(0) = 4 \times 0 - 7 = -7$ et $f(3) = 12 - 7 = 5$.
— $f(-2) = 4 \times (-2) - 7 = -8 - 7 = -15$: on retranche 7 à un nombre déjà négatif, le résultat s'éloigne encore de 0.
— $f(0{,}5) = 4 \times 0{,}5 - 7 = 2 - 7 = -5$.

$$f(0) = -7 \qquad f(3) = 5 \qquad f(-2) = -15 \qquad f(0{,}5) = -5$$

On remarque une régularité : de $x = 0$ à $x = 3$, l'image augmente de 12, soit 4 par unité, le coefficient de x. Les images sont -7, 5, -15 et -5.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f(0) = -7 \cdot f(3) = 5 \cdot f(-2) = -15 \cdot f(0{,}5) = -5$.

Correction de l'exercice 2 – Une fonction avec un carré

On remplace x par chaque valeur, en mettant les nombres négatifs entre parenthèses, puis on calcule le carré, le produit et enfin la différence.

— $g(0) = 0 - 0 = 0$ et $g(2) = 4 - 6 = -2$.

— $g(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1)$. Le carré d'un nombre négatif est positif, et $-3 \times (-1) = +3$:

$$g(-1) = 1 + 3 = 4$$

— $g(5) = 25 - 15 = 10$.

Erreur classique : écrire $g(-1) = -1 - 3 = -4$, en oubliant les parenthèses. On remarque aussi que $g(3) = 9 - 9 = 0$: les nombres 0 et 3 ont la même image. Les images sont 0, -2, 4 et 10.

Réponse. $g(0) = 0 \cdot g(2) = -2 \cdot g(-1) = 4 \cdot g(5) = 10$.

Correction de l'exercice 3 – Une expression avec parenthèses

a) On remplace x, puis on calcule d'abord la parenthèse :
$h(1) = 2(1 - 3) + 5 = 2 \times (-2) + 5 = 1$, $h(4) = 2 \times 1 + 5 = 7$ et $h(-2) = 2 \times (-5) + 5 = -5$.

b) On développe : $2(x - 3) + 5 = 2x - 6 + 5$, d'où

$$h(x) = 2x - 1$$

Avec cette forme, on retrouve $2 - 1 = 1$, $8 - 1 = 7$ et $-4 - 1 = -5$: les deux écritures définissent la même fonction, et la forme réduite rend les calculs plus rapides.

Les images sont 1, 7 et -5, et l'on a $h(x) = 2x - 1$.

Réponse. a) $h(1) = 1$, $h(4) = 7$, $h(-2) = -5 \cdot$ b) $h(x) = 2x - 1$.

Correction de l'exercice 4 – Coefficient négatif

On remplace x par chaque valeur ; le coefficient -2 est négatif, il faut donc surveiller les signes des produits.

— $f(0) = 0 + 9 = 9$.

— $f(-3) = -2 \times (-3) + 9 = 6 + 9 = 15$: le produit de deux nombres négatifs est positif.

— $f(4{,}5) = -9 + 9 = 0$: le nombre 4,5 a pour image 0.

— $f(10) = -20 + 9 = -11$.

$$f(0) = 9 \qquad f(-3) = 15 \qquad f(4{,}5) = 0 \qquad f(10) = -11$$

Quand x augmente, $f(x)$ **diminue** de 2 à chaque unité, car le coefficient de x est négatif. Les images sont 9, 15, 0 et -11.

Réponse. $f(0) = 9 \cdot f(-3) = 15 \cdot f(4{,}5) = 0 \cdot f(10) = -11$.

Correction de l'exercice 5 – Compléter un tableau

On calcule chaque image en élevant d'abord x au carré, puis en retranchant 4.

— $f(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$ et $f(-1) = 1 - 4 = -3$.

— $f(0) = 0 - 4 = -4$, $f(2) = 4 - 4 = 0$ et $f(4) = 16 - 4 = 12$.

x	-3	-1	0	2	4
$f(x)$	5	-3	-4	0	12

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

La plus petite image du tableau est -4, obtenue pour $x = 0$. Ce n'est pas un hasard : un carré est toujours positif ou nul, donc

$$f(x) = x^2 - 4 \geq -4$$

pour tout nombre x. La seconde ligne se complète par 5, -3, -4, 0 et 12.

Réponse. $5 \cdot -3 \cdot -4 \cdot 0 \cdot 12$.

Correction de l'exercice 6 – Images de nombres opposés

a) $f(3) = 9$ et $f(-3) = (-3)^2 = 9$; $f(5) = 25$ et $f(-5) = (-5)^2 = 25$.

b) On remarque que deux nombres opposés ont la **même** image. Pour le démontrer, on prend un nombre a quelconque. Le produit de deux nombres de même signe est positif, donc $(-a) \times (-a) = a \times a$:

$$f(-a) = (-a)^2 = a^2 = f(a)$$

La propriété est démontrée pour **tout** nombre a, et pas seulement pour les exemples. Graphiquement, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Ce n'est pas vrai pour toutes les fonctions : avec $g(x) = 2x$, on a $g(3) = 6$ mais $g(-3) = -6$. **Conclusion** : $f(-a) = f(a)$ pour tout nombre a.

Réponse. a) 9, 9, 25, 25 · b) $f(-a) = f(a)$: deux opposés ont la même image.

Correction de l'exercice 7 – Comparer une image et son antécédent

On calcule chaque image, puis on la compare au nombre de départ.

— $f(0{,}5) = 0{,}25 - 0{,}5 = -0{,}25$, plus petit que 0,5.

— $f(2) = 4 - 2 = 2$: l'image est **égale** au nombre de départ.

— $f(3) = 9 - 3 = 6$, plus grand que 3.

Les trois situations sont possibles. Pour trouver tous les nombres égaux à leur image, on résout $x^2 - x = x$, soit $x^2 - 2x = 0$, et l'on factorise par x :

$$x(x - 2) = 0$$

La propriété du produit nul donne $x = 0$ ou $x = 2$. **Contrôle** : $f(0) = 0$. Conclusion : $f(0{,}5) < 0{,}5$, $f(2) = 2$ et $f(3) > 3$; seuls 0 et 2 sont égaux à leur image.

Réponse. $f(0{,}5) < 0{,}5 \cdot f(2) = 2 \cdot f(3) > 3$; l'égalité n'a lieu qu'en 0 et 2.

Correction de l'exercice 8 – Affine ou non ?

Une fonction est affine quand on peut écrire $f(x) = ax + b$, avec a et b deux nombres fixés. On essaie de mettre chaque expression sous cette forme.

a) $f(x) = 3x - 1$: $a = 3$ et $b = -1$, f est **affine**.

b) $g(x) = x^2$: la variable est au carré, ce n'est **pas** une fonction affine. Les images $g(1) = 1$, $g(2) = 4$, $g(3) = 9$ augmentent de 3 puis de 5, et non d'une quantité constante.

c) $h(x) = 5 = 0 \times x + 5$: h est **affine**, et même constante.

d) On sépare la fraction :

$$k(x) = \frac{x + 3}{2} = 0{,}5x + 1{,}5$$

k est **affine**, avec $a = 0{,}5$ et $b = 1{,}5$.

Bilan : f, h et k sont affines, g ne l'est pas.

Réponse. f, h et k sont affines ; g ne l'est pas.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 9 – D’un programme à une fonction

a) On traduit le programme étape par étape : $3x$, puis $3x + 2$, puis le tout multiplié par 2. On développe :

$$f(x) = 2(3x + 2) = 6x + 4$$

C’est une fonction affine. **Piège** : « ajouter 2, puis multiplier le tout par 2 » n’est pas « multiplier par 2, puis ajouter 2 » ; cette seconde lecture donnerait $6x + 2$.

b) Par la formule, $f(5) = 30 + 4 = 34$ et $f(-1) = -6 + 4 = -2$.

Contrôle par le programme : $5 \times 3 = 15$, $15 + 2 = 17$, $17 \times 2 = 34$; et $-1 \times 3 = -3$, $-3 + 2 = -1$, $-1 \times 2 = -2$. On a $f(x) = 6x + 4$, $f(5) = 34$ et $f(-1) = -2$.

Réponse. a) $f(x) = 6x + 4$ · b) $f(5) = 34$ et $f(-1) = -2$.

Correction de l’exercice 10 – Des images négatives

On calcule chaque image en élevant d’abord x au carré, puis en retranchant ce carré à 5.

— $f(0) = 5 - 0 = 5$, $f(2) = 5 - 4 = 1$ et $f(3) = 5 - 9 = -4$.

— $f(-3) = 5 - (-3)^2 = 5 - 9 = -4$: 3 et -3 ont la même image.

Erreur classique : écrire $f(-3) = 5 + 9 = 14$. Dans $-x^2$, c’est le carré qui est retranché, et ce carré est positif.

Comme un carré est toujours positif ou nul, on retranche à 5 un nombre positif ou nul :

$$f(x) = 5 - x^2 \leq 5$$

L’égalité a lieu pour $x = 0$. Les images sont 5, 1, -4 et -4, et la plus grande image est 5, obtenue pour $x = 0$.

Réponse. 5, 1, -4, -4 ; l’image maximale est 5, atteinte en $x = 0$.

Correction de l’exercice 11 – Deux fonctions à comparer

On calcule les deux images pour chaque valeur, puis on les compare.

— Pour $x = 1$: $f(1) = 2 + 3 = 5$ et $g(1) = 1$, donc $f(1) > g(1)$.

— Pour $x = 3$: $f(3) = 9$ et $g(3) = 9$, donc $f(3) = g(3)$.

— Pour $x = 4$: $f(4) = 11$ et $g(4) = 16$, donc $f(4) < g(4)$.

La comparaison **change** selon x : le carré finit par dépasser la fonction affine.

Pour aller plus loin, on peut vérifier en développant que $x^2 - (2x + 3) = (x - 3)(x + 1)$. Les deux fonctions sont donc égales quand

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

soit pour $x = 3$ et pour $x = -1$. **Contrôle** : $f(-1) = 1 = g(-1)$.

Réponse. $f(1) > g(1)$ · $f(3) = g(3)$ · $f(4) < g(4)$; égalité pour $x = 3$ et $x = -1$.

Correction de l’exercice 12 – Une fonction donnée par un tableau

a) On lit dans la colonne de 1 : $f(1) = 1$; dans la colonne de 5 : $f(5) = -2$.

b) On cherche 3 dans la **seconde** ligne : il apparaît dans les colonnes de 0 et de 3. Le nombre 3 a donc deux antécédents, 0 et 3. Une image est unique, mais un nombre peut avoir plusieurs antécédents.

c) Pour une fonction affine, l’image varie toujours de la même quantité pour chaque unité gagnée par x. Ici, de $x = 0$ à $x = 1$, l’image baisse de 2 ; de $x = 1$ à $x = 3$, elle **monte** de 2, soit +1 par unité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{1-3}{1-0} = -2 \qquad \frac{3-1}{3-1} = 1$$

Ces variations ne sont pas les mêmes : f **n'est pas** affine. On le voit aussi en b) : une fonction affine non constante ne prend jamais deux fois la même valeur. Réponses : 1 et -2 ; 0 et 3 ; non.

Réponse. a) $f(1) = 1$ et $f(5) = -2$ · b) 0 et 3 · c) non, le taux de variation change.

Correction de l'exercice 13 – Une forme factorisée

La forme factorisée facilite les calculs : on calcule chaque facteur, puis leur produit.

— $f(0) = 0 \times (-4) = 0$ et $f(4) = 4 \times 0 = 0$: la forme factorisée donne directement les deux antécédents de 0, car un produit est nul dès qu'un facteur l'est.
— $f(2) = 2 \times (-2) = -4$ et $f(6) = 6 \times 2 = 12$.
— $f(-1) = (-1) \times (-5) = 5$.

$$f(0) = 0 \quad f(4) = 0 \quad f(2) = -4 \quad f(6) = 12 \quad f(-1) = 5$$

Contrôle avec la forme développée $x^2 - 4x$: $36 - 24 = 12$ et $1 + 4 = 5$. Les images sont 0, 0, -4, 12 et 5.

Réponse. 0 · 0 · -4 · 12 · 5.

Correction de l'exercice 14 – L'aire d'un rectangle

a) L'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur :

$$A(x) = x(x-3)$$

b) $A(5) = 5 \times 2 = 10$ cm², $A(8) = 8 \times 5 = 40$ cm² et $A(10) = 10 \times 7 = 70$ cm². L'aire n'augmente pas régulièrement : elle gagne 30 cm² de 5 à 8, puis encore 30 cm² de 8 à 10 seulement.

c) Une largeur doit être strictement positive : $x - 3 > 0$, donc $x > 3$. Pour $x = 3$, la largeur est nulle ; pour $x = 2$, elle vaudrait -1 cm, ce qui n'a pas de sens.

Le calcul $A(2) = -2$ est possible, mais il ne représente aucun rectangle. Réponses : $A(x) = x(x-3)$; 10, 40 et 70 cm² ; $x > 3$.

Réponse. a) $A(x) = x(x-3)$ · b) 10, 40 et 70 cm² · c) $x > 3$.

Correction de l'exercice 15 – Une température qui baisse

a) On remplace h par chaque durée : $T(0) = 18$ degrés, $T(6) = 18 - 3 = 15$ degrés et $T(20) = 18 - 10 = 8$ degrés. La température baisse régulièrement de 0,5 degré par heure.

b) On cherche l'antécédent de 10 : on résout $T(h) = 10$.

$$18 - 0{,}5h = 10 \Leftrightarrow -0{,}5h = -8 \Leftrightarrow h = 16$$

On divise par $-0{,}5$: le quotient de deux nombres négatifs est positif.

Le modèle a ses limites : il annoncerait 0 degré au bout de 36 heures, puis des températures de plus en plus basses, ce qui n'arrive pas dans une pièce. Il ne vaut que sur quelques heures.

Contrôle : $T(16) = 18 - 8 = 10$. La température atteint 10 degrés **au bout de** 16 **heures**.

Réponse. a) 18, 15 et 8 degrés · b) au bout de 16 heures.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : trois fonctions

a) $f(2) = 6 - 4 = 2$; $g(2) = 4 + 1 = 5$; $h(2) = 1 \times 4 = 4$.

b) $f(-3) = -9 - 4 = -13$; $g(-3) = 9 + 1 = 10$; $h(-3) = (-4) \times (-1) = 4$.

c) Pour $x = 1$: $f(1) = -1$, $g(1) = 2$ et $h(1) = 0 \times 3 = 0$. C’est h ; sa forme factorisée l’annonçait, car le facteur $x - 1$ s’annule en 1.

d) $f(0) = -4$ et $h(0) = -2$ sont négatifs. Pour g, un carré est toujours positif ou nul, donc

$$g(x) = x^2 + 1 \geq 1$$

pour tout x : g n’a jamais d’image négative.

Réponses : 2, 5, 4 ; −13, 10, 4 ; la fonction h ; la fonction g.

Réponse. a) 2, 5, 4 · b) −13, 10, 4 · c) h · d) g.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).