

Plaquette 3 - Chercher des antécédents : résoudre $f(x) = k$

Notion de fonction — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le sens des deux questions.

Question	Ce qu'on fait
image de a	on calcule $f(a)$
antécédent de k	on résout $f(x) = k$

Combien d'antécédents ? Une image est toujours unique, un antécédent ne l'est pas.

Fonction	Nombre d'antécédents de k
affine non constante	toujours exactement un
$f(x) = x^2$	deux si $k > 0$, un si $k = 0$, aucun si $k < 0$
constante	aucun, sauf pour la valeur constante où il y en a une infinité

Les outils de résolution.

- Fonction affine : équation du premier degré.
- Expression factorisée égale à 0 : règle du produit nul.
- Expression avec x^2 : on ramène tout à 0, puis on factorise.

Règle du produit nul.

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Différence de carrés.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Toujours vérifier. On remplace chaque antécédent trouvé dans f et on contrôle qu'on retombe sur k . Dans un problème concret, on rejette ensuite les solutions sans signification — longueur négative, effectif décimal.

Correction de l'exercice 1 - Antécédents par une fonction affine

- **Antécédent de 0** : on résout $3x - 12 = 0$ ✓
- **On ajoute 12** : $3x = 12$ ✓
- **Solution** : $x = 4$ ✓
- **Vérification** : $12 - 12 = 0$ ✓
- **Antécédent de 9** : on résout $3x - 12 = 9$ ✓
- **On ajoute 12** : $3x = 21$ ✓
- **Solution** : $x = 7$ ✓
- **Vérification** : $21 - 12 = 9$ ✓
- **Antécédent de -6** : on résout $3x - 12 = -6$ ✓
- **On ajoute 12** : $3x = 6$ ✓
- **Solution** : $x = 2$ ✓

— **Vérification** : $6 - 12 = -6$ ✓

— **Bilan** :

$$4 \quad 7 \quad 2$$

— **Observation** : chaque nombre a **exactement un** antécédent ✓

— **Raison** : f est affine de coefficient non nul ✓

— **Conséquence** : l'équation est du premier degré ✓

— **Contrôle de la régularité** : $9 - 0 = 9$ et $7 - 4 = 3$ ✓

— **Rapport** : $\frac{9}{3} = 3$, le coefficient de f ✓

Réponse. 4 pour 0 · 7 pour 9 · 2 pour -6.

Correction de l'exercice 2 - Coefficient négatif

— **Antécédent de 1** : on résout $-2x + 5 = 1$ ✓

— **On retranche 5** : $-2x = -4$ ✓

— **On divise par -2** : $x = 2$ ✓

— **Vérification** : $-4 + 5 = 1$ ✓

— **Antécédent de 5** : on résout $-2x + 5 = 5$ ✓

— **On retranche 5** : $-2x = 0$ ✓

— **Solution** : $x = 0$ ✓

— **Vérification** : $0 + 5 = 5$ ✓

— **Antécédent de 0** : on résout $-2x + 5 = 0$ ✓

— **On retranche 5** : $-2x = -5$ ✓

— **Solution** :

$$x = 2,5$$

— **Vérification** : $-5 + 5 = 0$ ✓

— **Bilan** : 2, 0 et 2,5 ✓

— **Observation** : là encore, un seul antécédent par valeur ✓

— **Attention au signe** : diviser par -2 change le signe ✓

— **Erreur classique** : conclure $x = -2$ pour l'antécédent de 1 ✓

— **Contrôle du garde-fou** : $f(-2) = 4 + 5 = 9 \neq 1$ ✓

— **Remarque** : quand k augmente, l'antécédent **diminue** ✓

— **Cause** : le coefficient de x est négatif ✓

Réponse. 2 pour 1 · 0 pour 5 · 2,5 pour 0.

Correction de l'exercice 3 - La fonction carré

— **Antécédents de 9** : on résout $x^2 = 9$ ✓

— **Cas $k > 0$** : deux solutions opposées ✓

— **Solutions** :

$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

— **Vérification** : $3^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$ ✓

— **Antécédent de 0** : on résout $x^2 = 0$ ✓

— **Cas $k = 0$** : une seule solution ✓

— **Solution** : $x = 0$ ✓

— **Vérification** : $0^2 = 0$ ✓

— **Antécédents de -4** : on résout $x^2 = -4$ ✓

— **Argument** : un carré est toujours positif ou nul ✓

— **Conclusion** :

aucun antécédent

— **Contrôle** : $2^2 = 4$ et $(-2)^2 = 4$, jamais -4 ✓

— **Bilan des trois cas** : deux, un, aucun ✓

— **Piège** : écrire $\sqrt{9} = \pm 3$ ✓

— **Correction** : $\sqrt{9}$ désigne uniquement 3 ✓

— **Ce qui a deux solutions** : l'équation $x^2 = 9$, pas le symbole racine ✓

— **Antécédents de 2** : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ ✓

— **Valeurs approchées** : $\pm 1,41$ ✓

Réponse. 3 et -3 pour 9 · 0 pour 0 · aucun pour -4 .

Correction de l'exercice 4 - Un carré décalé

— **Antécédents de 4** : on résout $x^2 - 5 = 4$ ✓

— **On ajoute 5** : $x^2 = 9$ ✓

— **Solutions** :

$x = 3$ ou $x = -3$

— **Vérification** : $9 - 5 = 4$ dans les deux cas ✓

— **Antécédent de -5** : on résout $x^2 - 5 = -5$ ✓

— **On ajoute 5** : $x^2 = 0$ ✓

— **Solution** : $x = 0$ ✓

— **Vérification** : $0 - 5 = -5$ ✓

— **Antécédents de -9** : on résout $x^2 - 5 = -9$ ✓

— **On ajoute 5** : $x^2 = -4$ ✓

— **Conclusion** :

aucun antécédent

— **Interprétation** : -9 n'est atteint par aucune image ✓

— **Image la plus petite** : -5 ✓

— **Argument** : $x^2 \geq 0$, donc $x^2 - 5 \geq -5$ ✓

— **Conséquence** : tout nombre inférieur à -5 est sans antécédent ✓

— **Contrôle avec -6** : $x^2 = -1$, impossible ✓

— **Contrôle avec -1** : $x^2 = 4$, donc $x = \pm 2$ ✓

— **Vérification** : $4 - 5 = -1$ ✓

Réponse. ± 3 pour 4 · 0 pour -5 · aucun pour -9 .

Correction de l'exercice 5 - Une forme factorisée

— **Équation** : $(x - 2)(x + 5) = 0$ ✓

— **Règle du produit nul** ✓

— **Premier facteur** : $x - 2 = 0$ ✓

— **Solution** : $x = 2$ ✓

— **Second facteur** : $x + 5 = 0$ ✓

— **Solution** : $x = -5$ ✓

— **Antécédents de 0** :

2 et -5

- **Vérification pour $x = 2$** : $0 \times 7 = 0$ ✓
 - **Vérification pour $x = -5$** : $(-7) \times 0 = 0$ ✓
 - **Calcul de $f(0)$** : $(-2) \times 5$ ✓
 - **Image de 0** :

$$-10$$
 - **Attention à ne pas confondre** : $f(0) = -10$, tandis que les antécédents de 0 sont 2 et -5 ✓
 - **Forme développée** : $x^2 + 3x - 10$ ✓
 - **Contrôle** : $x^2 + 5x - 2x - 10$ ✓
 - **Contrôle de $f(0)$ par la forme développée** : -10 ✓
 - **Avantage de la forme factorisée** : elle donne les antécédents de 0 sans calcul ✓
 - **Avantage de la forme développée** : elle donne $f(0)$ d'un coup d'œil ✓
- Réponse.** Antécédents de 0 : 2 et -5 ; $f(0) = -10$.

Correction de l'exercice 6 - Factoriser pour résoudre

- **Antécédents de 0** : on résout $x^2 - 6x = 0$ ✓
- **Facteur commun** : x ✓
- **Factorisation** : $x(x - 6) = 0$ ✓
- **Solutions** :

$$x = 0 \text{ ou } x = 6$$
- **Vérification pour $x = 6$** : $36 - 36 = 0$ ✓
- **Erreur à éviter** : diviser par x ✓
- **Conséquence** : la solution $x = 0$ disparaîtrait ✓
- **Antécédents de -9** : on résout $x^2 - 6x = -9$ ✓
- **Passage à zéro** : $x^2 - 6x + 9 = 0$ ✓
- **Test du carré parfait** : $9 = 3^2$ et $2 \times x \times 3 = 6x$ ✓
- **Factorisation** : $(x - 3)^2 = 0$ ✓
- **Solution** :

$$x = 3$$
- **Nombre d'antécédents** : un seul ✓
- **Vérification** : $9 - 18 = -9$ ✓
- **Interprétation** : -9 est l'image la plus petite ✓
- **Forme canonique** : $f(x) = (x - 3)^2 - 9$ ✓
- **Contrôle** : $x^2 - 6x + 9 - 9 = x^2 - 6x$ ✓
- **Conséquence** : $f(x) \geq -9$ pour tout x ✓
- **Contrôle avec -10** : aucun antécédent ✓

Réponse. Antécédents de 0 : 0 et 6 ; antécédent de -9 : 3 seulement.

Correction de l'exercice 7 - Lire dans un tableau

- a) **Recherche des cases valant 0** ✓
- **Première occurrence** : colonne de -1 ✓
 - **Seconde occurrence** : colonne de 2 ✓
 - **Antécédents de 0** :

$$-1 \text{ et } 2$$

- **Recherche des cases valant 6** ✓
- **Colonnes concernées** : -4 et 7 ✓
- **Antécédents de 6** :

-4 et 7

b) **Colonne de 5** : image 3 ✓

- **Résultat** : $f(5) = 3$ ✓
- **Unicité** : une seule case dans la colonne ✓

c) **Recherche de la valeur -5 dans la seconde ligne** ✓

- **Constat** : elle n'y figure pas ✓
- **Conclusion prudente** : d'après ce tableau, -5 n'a pas d'antécédent ✓
- **Nuance importante** : le tableau ne donne que 6 valeurs ✓
- **Conséquence** : d'autres antécédents peuvent exister hors du tableau ✓
- **Exemple** : entre 0 et 2, l'image passe de -2 à 0 ✓
- **Remarque** : rien n'interdit qu'elle descende ailleurs jusqu'à -5 ✓
- **Règle** : un tableau prouve l'existence d'un antécédent, jamais son absence ✓
- **Image la plus petite du tableau** : -2 ✓
- **Image la plus grande** : 6 ✓

Réponse. a) -1 et 2 pour 0 ; -4 et 7 pour 6 · b) 3 · c) pas d'après ce tableau, mais on ne peut pas l'affirmer.

Correction de l'exercice 8 - Image ou antécédent ?

a) **Traduction** : on calcule $f(3)$ ✓

- **Calcul** : $12 + 1$ ✓
- **Image** :

13

b) **Traduction** : on résout $4x + 1 = 13$ ✓

- **On retranche 1** : $4x = 12$ ✓
- **Antécédent** :

$x = 3$

- **Observation** : a) et b) sont les deux lectures d'une même égalité ✓
- **Écriture commune** : $f(3) = 13$ ✓

c) **Traduction** : on cherche l'antécédent de -7 ✓

- **Équation** : $4x + 1 = -7$ ✓
- **On retranche 1** : $4x = -8$ ✓
- **Solution** :

$x = -2$

- **Vérification** : $-8 + 1 = -7$ ✓

d) **Traduction** : on calcule une image ✓

- **Calcul** : $4 \times (-2) + 1$ ✓
- **Résultat** :

-7

- **Observation** : c) et d) forment aussi un couple ✓
- **Écriture commune** : $f(-2) = -7$ ✓

- **Bilan** : « image » appelle un calcul, « antécédent » une équation ✓
- **Piège de vocabulaire** : « résoudre $f(x) = k$ » est une recherche d'antécédent ✓
- **Piège inverse** : « calculer $f(k)$ » est une recherche d'image ✓

Réponse. a) $13 \cdot$ b) $3 \cdot$ c) $x = -2 \cdot$ d) -7 .

Correction de l'exercice 9 - Deux fonctions égales

- **Condition** : $f(x) = g(x)$ ✓
- **Équation** : $3x - 2 = -x + 6$ ✓
- **On ajoute** x : $4x - 2 = 6$ ✓
- **On ajoute** 2 : $4x = 8$ ✓
- **Valeur cherchée** :
$$x = 2$$
- **Valeur commune par** f : $6 - 2$ ✓
- **Résultat** :
$$4$$
- **Contrôle par** g : $-2 + 6 = 4$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Interprétation** : 2 a la même image par les deux fonctions ✓
- **Lecture graphique** : les deux droites se coupent en $(2 ; 4)$ ✓
- **Contrôle pour** $x = 0$: $f(0) = -2$ et $g(0) = 6$ ✓
- **Comparaison** : f est en dessous ✓
- **Contrôle pour** $x = 5$: $f(5) = 13$ et $g(5) = 1$ ✓
- **Comparaison** : f est au-dessus ✓
- **Conclusion** : les courbes se croisent une seule fois ✓
- **Raison** : les coefficients directeurs 3 et -1 diffèrent ✓
- **Cas sans croisement** : $h(x) = 3x + 5$ ✓
- **Contrôle** : $3x - 2 = 3x + 5$ donne $-2 = 5$, impossible ✓

Réponse. $x = 2$, valeur commune 4.

Correction de l'exercice 10 - Combien d'antécédents ?

- **Étude de** 12 : on résout $x^2 - 4 = 12$ ✓
- **Équation** : $x^2 = 16$ ✓
- **Nombre d'antécédents** : deux ✓
- **Valeurs** : 4 et -4 ✓
- **Étude de** -4 : on résout $x^2 - 4 = -4$ ✓
- **Équation** : $x^2 = 0$ ✓
- **Nombre d'antécédents** : un ✓
- **Valeur** : 0 ✓
- **Étude de** -7 : on résout $x^2 - 4 = -7$ ✓
- **Équation** : $x^2 = -3$ ✓
- **Nombre d'antécédents** : aucun ✓
- **Argument** : un carré n'est jamais négatif ✓
- **Étude de** 0 : on résout $x^2 - 4 = 0$ ✓
- **Différence de carrés** : $(x - 2)(x + 2) = 0$ ✓
- **Nombre d'antécédents** : deux ✓

— Valeurs :

2 et -2 — Règle générale : deux antécédents si $k > -4$, un si $k = -4$, aucun si $k < -4$ ✓— Explication : -4 est l'image minimale ✓— Contrôle : $f(0) = -4$ ✓**Réponse.** 12 : deux $(\pm 4) \cdot -4$: un $(0) \cdot -7$: aucun $\cdot 0$: deux (± 2) .**Correction de l'exercice 11 - Le nombre de places**a) Calcul de $C(12)$: $2,5 \times 12 + 8$ ✓

— Produit : 30 ✓

— Coût :

38 €

b) Traduction : on cherche l'antécédent de 48 ✓

— Équation : $2,5n + 8 = 48$ ✓— On retranche 8 : $2,5n = 40$ ✓

— On divise par 2,5 :

 $n = 16$ — Vérification : $40 + 8 = 48$ € ✓

— Contrôle de vraisemblance : 16 est bien un entier ✓

— Conclusion : 16 participants au maximum ✓

— Contrôle à 17 participants : $42,5 + 8 = 50,50$ € ✓

— Verdict : le budget serait dépassé ✓

— Contrôle à 15 participants : $37,5 + 8 = 45,50$ € ✓

— Reste disponible : 2,50 € ✓

— Interprétation des 8 € : une part fixe, indépendante du nombre ✓

— Interprétation des 2,50 € : le coût par participant ✓

— Coût moyen par participant à 16 : $\frac{48}{16} = 3$ € ✓

— Remarque : ce coût moyen baisse quand le groupe grandit ✓

— Contrôle à 40 participants : $\frac{108}{40} = 2,70$ € ✓**Réponse.** a) 38 € · b) 16 participants.**Correction de l'exercice 12 - L'aire imposée**— Aire en fonction de x : $A(x) = x(x + 4)$ ✓

— Traduction : on cherche l'antécédent de 96 ✓

— Équation : $x(x + 4) = 96$ ✓— Développement : $x^2 + 4x = 96$ ✓— Passage à zéro : $x^2 + 4x - 96 = 0$ ✓— Recherche : deux nombres de produit -96 et de somme 4 ✓— Décomposition de 96 : $96 = 8 \times 12$ ✓— Candidats : -8 et 12 ✓— Produit : -96 ✓

— Somme : 4 ✓

— Factorisation :

$$(x - 8)(x + 12) = 0$$

- **Contrôle du développement** : $x^2 + 12x - 8x - 96 = x^2 + 4x - 96$ ✓
- **Première solution** : $x = 8$ ✓
- **Seconde solution** : $x = -12$ ✓
- **Rejet** : une largeur ne peut pas être négative ✓
- **Solution retenue** :

$$x = 8 \text{ cm}$$

- **Longueur** : 12 cm ✓
- **Vérification de l'aire** : $8 \times 12 = 96 \text{ cm}^2$ ✓
- **Périmètre** : $2 \times 20 = 40 \text{ cm}$ ✓

Réponse. $x = 8 \text{ cm}$ (rectangle 12×8).

Correction de l'exercice 13 - Le temps de trajet

a) **Durée en heures** : 2,5 ✓

- **Calcul de $d(2,5)$** : $80 \times 2,5$ ✓
- **Distance** :

$$200 \text{ km}$$

- **Contrôle** : $80 \times 2 = 160$ plus une demi-heure à 40 km ✓
- **Total** : 200 km ✓

b) **Traduction** : on cherche l'antécédent de 360 ✓

- **Équation** : $80t = 360$ ✓
- **On divise par 80** : $t = \frac{360}{80}$ ✓
- **Durée** :

$$t = 4,5 \text{ h}$$

- **Conversion** : 4 h 30 ✓
- **Vérification** : $80 \times 4,5 = 360 \text{ km}$ ✓
- **Contrôle à 4 h** : 320 km ✓
- **Contrôle à 5 h** : 400 km ✓
- **Encadrement** : 360 est bien entre les deux ✓
- **Nature de la fonction** : linéaire ✓
- **Conséquence** : doubler la durée double la distance ✓
- **Contrôle** : $d(9) = 720 \text{ km}$ ✓
- **Distance en 15 min** : $80 \times 0,25 = 20 \text{ km}$ ✓
- **Remarque** : chaque nombre positif a exactement un antécédent ✓

Réponse. a) 200 km · b) 4 h 30.

Correction de l'exercice 14 - Résoudre $f(x) = 0$

a) **Différence de carrés** : $9 = 3^2$ ✓

- **Factorisation** : $(x - 3)(x + 3) = 0$ ✓
- **Antécédents** :

$$3 \text{ et } -3$$

- **Vérification** : $9 - 9 = 0$ dans les deux cas ✓

b) **Facteur commun** : x ✓

— **Factorisation** : $x(x + 4) = 0$ ✓

— **Antécédents** :

0 et -4

— **Vérification pour** $x = -4$: $16 - 16 = 0$ ✓

c) **Règle du produit nul** ✓

— **Premier facteur** : $2x - 6 = 0$, donc $x = 3$ ✓

— **Second facteur** : $x + 1 = 0$, donc $x = -1$ ✓

— **Antécédents** :

3 et -1

— **Vérification pour** $x = 3$: $0 \times 4 = 0$ ✓

— **Vérification pour** $x = -1$: $(-8) \times 0 = 0$ ✓

d) **Équation** : $x^2 + 1 = 0$ ✓

— **Réécriture** : $x^2 = -1$ ✓

— **Argument** : un carré n'est jamais négatif ✓

— **Conclusion** :

aucun antécédent

— **Image minimale** : 1, atteinte en $x = 0$ ✓

— **Conséquence** : k ne s'annule jamais ✓

— **Bilan** : trois fonctions s'annulent, la quatrième non ✓

Réponse. a) ± 3 · b) 0 et -4 · c) 3 et -1 · d) aucun.

Correction de l'exercice 15 - Le bénéfice d'une association

a) **Calcul de** $B(5)$: 5×15 ✓

— **Bénéfice** : 75 € ✓

— **Calcul de** $B(15)$: 15×5 ✓

— **Bénéfice** : 75 € ✓

— **Observation** : 5 et 15 donnent le même bénéfice ✓

b) **Équation** : $x(20 - x) = 0$ ✓

— **Règle du produit nul** ✓

— **Premier facteur** : $x = 0$ ✓

— **Second facteur** : $20 - x = 0$, donc $x = 20$ ✓

— **Réponse** :

0 ou 20 gâteaux

— **Interprétation de** 0 : aucune vente, aucun bénéfice ✓

— **Interprétation de** 20 : les frais annulent la recette ✓

c) **Équation** : $x(20 - x) = 91$ ✓

— **Développement** : $20x - x^2 = 91$ ✓

— **Passage à zéro** : $x^2 - 20x + 91 = 0$ ✓

— **Recherche** : deux nombres de produit 91 et de somme 20 ✓

— **Décomposition** : $91 = 7 \times 13$ ✓

— **Somme** : 20 ✓

— **Factorisation** : $(x - 7)(x - 13) = 0$ ✓

— **Réponse** :

7 ou 13 gâteaux

— **Vérification pour 7** : $7 \times 13 = 91$ € ✓

— **Vérification pour 13** : $13 \times 7 = 91$ € ✓

— **Bénéfice maximal** : atteint en $x = 10$ ✓

— **Valeur** : $10 \times 10 = 100$ € ✓

Réponse. a) 75 € et 75 € · b) 0 ou 20 · c) 7 ou 13 gâteaux.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : images et antécédents

a) **Calcul de $f(0)$** : $0 - 0 - 3$ ✓

— **Résultat** : -3 ✓

— **Calcul de $f(3)$** : $9 - 6 - 3$ ✓

— **Résultat** : 0 ✓

— **Calcul de $f(-1)$** : $1 + 2 - 3$ ✓

— **Attention** : $-2 \times (-1) = +2$ ✓

— **Résultat** :

0

b) **Développement du produit** : $x^2 + x - 3x - 3$ ✓

— **Réduction** : $x^2 - 2x - 3$ ✓

— **Conclusion** : l'égalité est vérifiée ✓

— **Contrôle pour $x = 0$** : $(-3) \times 1 = -3$ ✓

— **Concordance avec a)** ✓

c) **Équation** : $(x - 3)(x + 1) = 0$ ✓

— **Règle du produit nul** ✓

— **Antécédents** :

3 et -1

— **Concordance avec a)** : ce sont les deux valeurs d'image nulle ✓

d) **Équation** : $x^2 - 2x - 3 = -3$ ✓

— **On ajoute 3** : $x^2 - 2x = 0$ ✓

— **Facteur commun** : x ✓

— **Factorisation** : $x(x - 2) = 0$ ✓

— **Antécédents** :

0 et 2

— **Vérification pour $x = 2$** : $4 - 4 - 3 = -3$ ✓

— **Vérification pour $x = 0$** : -3 ✓

— **Image minimale** : la forme canonique donne $(x - 1)^2 - 4$ ✓

— **Contrôle** : $x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3$ ✓

— **Minimum** : -4 , atteint en $x = 1$ ✓

— **Contrôle** : $1 - 2 - 3 = -4$ ✓

Réponse. a) $-3, 0, 0$ · b) développement vérifié · c) 3 et -1 · d) 0 et 2.