Plaquette 3 – Chercher des antécédents : résoudre f(x) = k

Notion de fonction — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le sens des deux questions.

Question	Ce qu'on fait
image de a	on **calcule** $f(a)$
antécédent de k	on **résout** $f(x) = k$

Combien d'antécédents ? Une image est toujours unique, un antécédent ne l'est pas.

Fonction	Nombre d'antécédents de k
affine non constante	toujours exactement un
$f(x) = x^2$	deux si $k > 0$, un si $k = 0$, aucun si $k < 0$
constante	aucun, sauf pour la valeur constante où il y en a une infinité

Les outils de résolution.

— Fonction affine : équation du premier degré.
— Expression factorisée égale à 0 : règle du produit nul.
— Expression avec x^2 : on ramène tout à 0, puis on factorise.

Règle du produit nul.

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Différence de carrés.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Toujours vérifier. On remplace chaque antécédent trouvé dans f et on contrôle qu'on retombe sur k. Dans un problème concret, on rejette ensuite les solutions sans signification — longueur négative, effectif décimal.

Correction de l'exercice 1 – Antécédents par une fonction affine

Chercher l'antécédent de k, c'est résoudre l'équation $f(x) = k$. Ici, chaque équation est du premier degré.

— Antécédent de 0 : $3x - 12 = 0$, donc $3x = 12$ et $x = 4$.
— Antécédent de 9 : $3x - 12 = 9$, donc $3x = 21$ et $x = 7$.
— Antécédent de -6 : $3x - 12 = -6$, donc $3x = 6$ et $x = 2$.

$$f(4) = 0 \qquad f(7) = 9 \qquad f(2) = -6$$

Chaque nombre a exactement un antécédent : f est affine, de coefficient non nul, donc chaque équation $3x - 12 = k$ a une seule solution.

Contrôle : $3 \times 7 - 12 = 9$. Les antécédents sont 4**,** 7 **et** 2.

Réponse. 4 pour 0 · 7 pour 9 · 2 pour -6.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Coefficient négatif

On résout $f(x) = k$ pour chaque valeur. Le coefficient de x est -2 : on divisera par un nombre négatif, il faut surveiller les signes.

— Antécédent de 1 : $-2x + 5 = 1$, donc $-2x = -4$ et $x = 2$.
— Antécédent de 5 : $-2x + 5 = 5$, donc $-2x = 0$ et $x = 0$.
— Antécédent de 0 : $-2x + 5 = 0$, donc $-2x = -5$ et

$$x = \frac{-5}{-2} = 2{,}5$$

Erreur classique : conclure $x = -2$ pour l’antécédent de 1. Or $f(-2) = 4 + 5 = 9 \neq 1$.

Contrôle : $f(2) = -4 + 5 = 1$ et $f(2{,}5) = -5 + 5 = 0$. Les antécédents sont 2**,** 0 **et** 2,5.

Réponse. 2 pour 1 · 0 pour 5 · 2,5 pour 0.

Correction de l’exercice 3 – La fonction carré

On résout $x^2 = k$ pour chaque valeur de k : le nombre de solutions dépend du signe de k.

— $x^2 = 9$: $9 > 0$, il y a deux solutions opposées, 3 et -3, car $3^2 = (-3)^2 = 9$.
— $x^2 = 0$: seul 0 a pour carré 0, une seule solution.
— $x^2 = -4$: un carré est toujours positif ou nul, donc **aucune** solution.

$$f(3) = f(-3) = 9$$

Piège : écrire $\sqrt{9} = \pm 3$. Le symbole $\sqrt{9}$ désigne seulement le nombre positif 3 ; c’est l’**équation** $x^2 = 9$ qui a deux solutions.

Antécédents de 9 : 3 **et** -3 ; de 0 : 0 ; de -4 : **aucun**.

Réponse. 3 et -3 pour 9 · 0 pour 0 · aucun pour -4.

Correction de l’exercice 4 – Un carré décalé

On ajoute d’abord 5 aux deux membres pour se ramener à une équation $x^2 = a$.

— Antécédents de 4 : $x^2 - 5 = 4$ donne $x^2 = 9$, d’où $x = 3$ ou $x = -3$.
— Antécédent de -5 : $x^2 - 5 = -5$ donne $x^2 = 0$, d’où $x = 0$.
— Antécédents de -9 : $x^2 - 5 = -9$ donne $x^2 = -4$, impossible : **aucun** antécédent.

Plus généralement, un carré est positif ou nul, donc

$$f(x) = x^2 - 5 \geq -5$$

pour tout x : tout nombre inférieur à -5 n’a aucun antécédent.

Contrôle : $3^2 - 5 = 4$. Antécédents de 4 : ± 3 ; de -5 : 0 ; de -9 : **aucun**.

Réponse. ± 3 pour 4 · 0 pour -5 · aucun pour -9.

Correction de l’exercice 5 – Une forme factorisée

Les antécédents de 0 sont les solutions de $(x - 2)(x + 5) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l’un de ses facteurs est nul :

$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 5 = 0$$

d’où $x = 2$ ou $x = -5$.

L’image de 0, elle, se calcule en remplaçant x par 0 : $f(0) = (0 - 2)(0 + 5) = -2 \times 5 = -10$.

Attention à ne pas confondre : les antécédents de 0 sont 2 et -5, tandis que l’image de 0 est -10. La forme factorisée donne les antécédents de 0 sans calcul ; la forme

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

développée, $x^2 + 3x - 10$, donne $f(0)$ d'un coup d'œil.

Contrôle : $f(-5) = (-7) \times 0 = 0$. Antécédents de 0 : 2 **et** -5 ; $f(0) = -10$.

Réponse. Antécédents de 0 : 2 et -5 ; $f(0) = -10$.

Correction de l'exercice 6 – Factoriser pour résoudre

— Antécédents de 0 : on résout $x^2 - 6x = 0$. On factorise par x : $x(x - 6) = 0$, d'où $x = 0$ ou $x = 6$. Il ne faut pas diviser par x, on perdrait la solution 0.

— Antécédents de -9 : on résout $x^2 - 6x = -9$, soit $x^2 - 6x + 9 = 0$. On reconnaît un carré parfait, car $9 = 3^2$ et $2 \times x \times 3 = 6x$:

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$$

Un carré est nul seulement si le nombre élevé au carré l'est : $x = 3$, un seul antécédent.

On peut aussi vérifier, en développant, que $f(x) = (x - 3)^2 - 9$: comme un carré est positif ou nul, $f(x) \geq -9$, et -9 est la plus petite image.

Contrôle : $f(3) = 9 - 18 = -9$. Antécédents de 0 : 0 **et** 6 ; de -9 : 3 seulement.

Réponse. Antécédents de 0 : 0 et 6 ; antécédent de -9 : 3 seulement.

Correction de l'exercice 7 – Lire dans un tableau

a) On cherche 0 dans la **seconde** ligne : il apparaît dans les colonnes de -1 et de 2. Les antécédents de 0 sont donc -1 et 2. De même, 6 apparaît dans les colonnes de -4 et de 7.

b) Dans la colonne de 5, on lit 3 : $f(5) = 3$.

c) La valeur -5 ne figure pas dans la seconde ligne. On peut seulement dire que, **d'après ce tableau**, -5 n'a pas d'antécédent.

$$f(-1) = f(2) = 0 \qquad f(-4) = f(7) = 6$$

Prudence : le tableau ne donne que six valeurs. D'autres nombres, absents du tableau, pourraient avoir -5 pour image. Un tableau peut prouver qu'un antécédent existe, jamais qu'il n'en existe pas.

Réponses : -1 et 2 ; -4 et 7 ; $f(5) = 3$; on ne peut pas conclure pour -5.

Réponse. a) -1 et 2 pour 0 ; -4 et 7 pour 6 · b) 3 · c) pas d'après ce tableau, mais on ne peut pas l'affirmer.

Correction de l'exercice 8 – Image ou antécédent ?

Le mot « image » appelle un **calcul** ; le mot « antécédent », ou l'ordre « résoudre $f(x) = k$ », appelle une **équation**.

a) On calcule $f(3) = 4 \times 3 + 1 = 13$.

b) On résout $4x + 1 = 13$, soit $4x = 12$: l'antécédent de 13 est 3. Les questions a) et b) sont les deux lectures de la même égalité, $f(3) = 13$.

c) Résoudre $f(x) = -7$, c'est chercher l'antécédent de -7 :

$$4x + 1 = -7 \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

d) On calcule $f(-2) = 4 \times (-2) + 1 = -7$. Là encore, c) et d) traduisent la même égalité, $f(-2) = -7$.

Réponses : 13 **;** 3 **;** $x = -2$ **;** -7.

Réponse. a) 13 · b) 3 · c) $x = -2$ · d) -7.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Deux fonctions égales

Les deux fonctions prennent la même valeur quand $f(x) = g(x)$: on résout cette équation du premier degré.

$$3x - 2 = -x + 6$$

On ajoute x : $4x - 2 = 6$. On ajoute 2 : $4x = 8$, donc $x = 2$. La valeur commune est $f(2) = 6 - 2 = 4$.

Graphiquement, les droites représentant f et g se coupent au point $(2\,;4)$. Elles ne se coupent qu'une fois, car leurs coefficients 3 et -1 sont différents : à gauche de 2, f est en dessous ($f(0) = -2 < g(0) = 6$) ; à droite, elle est au-dessus.

Contrôle : $g(2) = -2 + 6 = 4$. Les fonctions sont égales pour $x = 2$, et leur valeur commune est 4.

Réponse. $x = 2$, valeur commune 4.

Correction de l'exercice 10 – Combien d'antécédents ?

On résout $x^2 - 4 = k$ pour chaque valeur, c'est-à-dire $x^2 = k + 4$, puis on regarde le signe de $k + 4$.

— $k = 12$: $x^2 = 16$, **deux** antécédents, 4 et -4.
— $k = -4$: $x^2 = 0$, **un** antécédent, 0.
— $k = -7$: $x^2 = -3$, impossible, **aucun** antécédent.
— $k = 0$: on factorise la différence de carrés :

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0$$

d'où **deux** antécédents, 2 et -2.

Règle générale : un nombre k a deux antécédents si $k > -4$, un seul si $k = -4$, aucun si $k < -4$. Le nombre $-4 = f(0)$ est la plus petite image.

Bilan : **deux, un, aucun, deux**.

Réponse. 12 : deux (± 4) · -4 : un (0) · -7 : aucun · 0 : deux (± 2).

Correction de l'exercice 11 – Le nombre de places

a) On calcule l'image de 12 : $C(12) = 2{,}5 \times 12 + 8 = 30 + 8 = 38$ €.

b) Le coût ne doit pas dépasser 48 € : on cherche les n tels que $C(n) \leq 48$.

$$2{,}5n + 8 \leq 48 \Leftrightarrow 2{,}5n \leq 40 \Leftrightarrow n \leq 16$$

On divise par 2,5, positif, donc le sens est conservé. Le nombre de participants est entier : au maximum 16.

Les 8 € sont une part fixe et les 2,50 € le coût par participant : le coût moyen, $\dfrac{48}{16} = 3$ €, baisse quand le groupe grandit.

Contrôle : $C(16) = 40 + 8 = 48$ € et $C(17) = 50{,}50$ €, trop cher. Réponses : 38 **€** et 16 **participants**.

Réponse. a) 38 € · b) 16 participants.

Correction de l'exercice 12 – L'aire imposée

L'aire du rectangle vaut $A(x) = x(x + 4)$. On cherche l'antécédent de 96 : $x(x + 4) = 96$, soit $x(x + 4) - 96 = 0$.

On développe la forme proposée : $(x - 8)(x + 12) = x^2 + 12x - 8x - 96 = x^2 + 4x - 96$, qui

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

est bien égal à $x(x+4)-96$. L'équation devient

$$(x-8)(x+12)=0$$

donc $x=8$ ou $x=-12$. Une largeur est positive : seule $x=8$ convient.

Le rectangle mesure alors 8 cm sur 12 cm.

Contrôle : $8\times 12=96$ cm². Il faut $x=8$ **cm**.

Réponse. $x=8$ cm (rectangle 12×8).

Correction de l'exercice 13 – Le temps de trajet

a) 2 h 30 min font 2,5 h, car une demi-heure vaut 0,5 h. On calcule l'image de 2,5 :

$$d(2{,}5)=80\times 2{,}5=200$$

Le train parcourt 200 km : 160 km en 2 h, plus 40 km en une demi-heure.

b) On cherche l'antécédent de 360 : $80t=360$, donc $t=\dfrac{360}{80}=4{,}5$ h, soit 4 h 30 min.

La fonction d est linéaire : la distance est proportionnelle à la durée, et doubler la durée double la distance.

Contrôle : $80\times 4{,}5=360$ km. Réponses : 200 **km** et 4 **h** 30 **min**.

Réponse. a) 200 km · b) 4 h 30.

Correction de l'exercice 14 – Résoudre f(x) = 0

Les antécédents de 0 sont les solutions de l'équation « expression = 0 ». On factorise quand c'est possible, puis on applique la propriété du produit nul.

a) Différence de carrés : $x^2-9=(x-3)(x+3)$, d'où 3 et -3.

b) Facteur commun x : $x^2+4x=x(x+4)$, d'où 0 et -4.

c) L'expression est déjà un produit : $2x-6=0$ donne $x=3$, et $x+1=0$ donne $x=-1$.

d) $x^2+1=0$ s'écrit

$$x^2=-1$$

impossible, car un carré n'est jamais négatif : 0 n'a **aucun** antécédent par k. Sa plus petite image est 1, atteinte en $x=0$.

Contrôle de b) : $(-4)^2+4\times(-4)=16-16=0$. Réponses : ± 3 ; 0 et -4 ; 3 et -1 ; aucun.

Réponse. a) ± 3 · b) 0 et -4 · c) 3 et -1 · d) aucun.

Correction de l'exercice 15 – Le bénéfice d'une association

a) $B(5)=5\times 15=75$ € et $B(15)=15\times 5=75$ €. Les deux calculs font intervenir les mêmes facteurs, dans l'autre ordre.

b) On résout $x(20-x)=0$: $x=0$ ou $20-x=0$, soit $x=20$. À 0 gâteau, il n'y a rien à vendre ; à 20 gâteaux, la recette couvre tout juste les frais.

c) On résout $x(20-x)=91$, soit $x(20-x)-91=0$. On développe la forme proposée : $(x-7)(13-x)=13x-x^2-91+7x=-x^2+20x-91$, égale à $x(20-x)-91$. Donc

$$(x-7)(13-x)=0$$

d'où $x=7$ ou $x=13$.

Contrôle : $B(7)=7\times 13=91$ € et $B(13)=13\times 7=91$ €. Réponses : 75 € deux fois ; 0 ou 20 ; 7 **ou** 13 **gâteaux**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) 75 € et 75 € · b) 0 ou 20 · c) 7 ou 13 gâteaux.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : images et antécédents

a) $f(0) = -3$; $f(3) = 9 - 6 - 3 = 0$; $f(-1) = 1 + 2 - 3 = 0$, car $-2 \times (-1) = +2$.

b) On développe le produit : $(x - 3)(x + 1) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3$. C’est bien $f(x)$.

c) Avec la forme factorisée, $(x - 3)(x + 1) = 0$ donne $x = 3$ ou $x = -1$: on retrouve les deux nombres d’image nulle trouvés en a).

d) On résout $x^2 - 2x - 3 = -3$. En ajoutant 3, il reste $x^2 - 2x = 0$, que l’on factorise par x :

$$x(x - 2) = 0$$

d’où $x = 0$ ou $x = 2$.

Contrôle : $f(2) = 4 - 4 - 3 = -3$. Réponses : -3, 0, 0 ; égalité vérifiée ; 3 **et** -1 ; 0 **et** 2.

Réponse. a) -3, 0, 0 · b) développement vérifié · c) 3 et -1 · d) 0 et 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).