Plaquette 1 – Images, antécédents et lectures

Notion de fonction — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire et méthodes du cours.

— Une **fonction** f associe à chaque nombre x un unique nombre noté $f(x)$, appelé **image** de x par f.
— Si $f(a) = b$: b est l'image de a, et a est un **antécédent** de b.
— Calculer une image : on **remplace** x par la valeur dans l'expression de f.
— Chercher un antécédent de k : on **résout l'équation** $f(x) = k$.
— Une image est unique ; un nombre peut en revanche avoir **plusieurs antécédents** (ou aucun).
— Lecture graphique : l'image de a se lit sur l'axe des ordonnées à la verticale de a ; les antécédents de k se lisent en cherchant les points de la courbe d'ordonnée k.
— Notations : $f : x \mapsto 3x - 5$ se lit « f qui à x associe $3x - 5$ », et $f(x) = 3x - 5$.

Exemple. Pour $f(x) = 3x - 5$:

$$f(4) = 3 \times 4 - 5 = 7$$

donc 7 est l'image de 4, et 4 est un antécédent de 7.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des images

Calculer une image, c'est remplacer x par la valeur donnée dans l'expression de f, puis effectuer le calcul en respectant les priorités : la multiplication avant la soustraction.

— $f(0) = 3 \times 0 - 5 = -5$.
— $f(4) = 3 \times 4 - 5 = 12 - 5 = 7$.
— $f(-2) = 3 \times (-2) - 5 = -6 - 5 = -11$: le produit d'un positif par un négatif est négatif.
— $f(0{,}5) = 3 \times 0{,}5 - 5$, d'où

$$f(0{,}5) = 1{,}5 - 5 = -3{,}5$$

Chaque nombre a une seule image. Ainsi, l'image de 4 par f est 7, ce qui s'écrit $f(4) = 7$. Les images sont -5, 7, -11 et $-3{,}5$.

Réponse. -5 ; 7 ; -11 ; $-3{,}5$.

Correction de l'exercice 2 – Fonction avec un carré

On remplace x par chaque valeur, en mettant les nombres négatifs entre parenthèses, puis on calcule le carré avant le produit.

— $g(0) = 0^2 - 4 \times 0 = 0$.
— $g(2) = 2^2 - 4 \times 2 = 4 - 8 = -4$.
— $g(-3) = (-3)^2 - 4 \times (-3)$. Le carré d'un nombre négatif est positif, $(-3)^2 = 9$, et $-4 \times (-3) = +12$:

$$g(-3) = 9 + 12 = 21$$

— $g(5) = 5^2 - 4 \times 5 = 25 - 20 = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Piège : sans parenthèses, -3^2 vaut -9, car seul 3 est élevé au carré. Les images sont 0, -4, 21 et 5.

Réponse. 0 ; -4 ; 21 ; 5.

Correction de l'exercice 3 – Chercher un antécédent

Chercher un antécédent de k, c'est chercher les nombres x dont l'image vaut k : on résout l'équation $f(x) = k$.

a) On résout $3x - 5 = 7$. On ajoute 5 : $3x = 12$, donc $x = 4$. C'est cohérent avec l'exercice 1, où l'on a trouvé $f(4) = 7$.

b) On résout $3x - 5 = -2$. On ajoute 5 puis on divise par 3 :

$$3x = 3 \quad \text{donc} \quad x = 1$$

Contrôle : $f(1) = 3 \times 1 - 5 = -2$. L'antécédent de 7 est 4, celui de -2 est 1.

Réponse. a) $x = 4$ · b) $x = 1$.

Correction de l'exercice 4 – Plusieurs antécédents

On cherche les nombres dont le carré vaut 9, puis 0, puis -5 : on résout $x^2 = k$, et le nombre de solutions dépend du signe de k.

— $x^2 = 9$: comme $3^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$, le nombre 9 a **deux** antécédents, 3 et -3.
— $x^2 = 0$: seul 0 a pour carré 0, il y a un seul antécédent.
— $x^2 = -5$: un carré est toujours positif ou nul, donc -5 n'a **aucun** antécédent.

$$h(3) = h(-3) = 9$$

À retenir : un nombre a toujours une seule image, mais il peut avoir 0, 1, 2 antécédents ou davantage. Antécédents de 9 : -3 et 3 ; de 0 : 0 ; de -5 : aucun.

Réponse. 9 : -3 et 3 · 0 : 0 · -5 : aucun.

Correction de l'exercice 5 – Lire un tableau de valeurs

Dans un tableau de valeurs, la première ligne contient les nombres x et la seconde leurs images $f(x)$, placées dans la même colonne.

a) On repère la colonne $x = -1$: l'image de -1 est 0, c'est-à-dire $f(-1) = 0$.

b) On cherche dans la **seconde** ligne les cases contenant -3 : elles se trouvent dans les colonnes $x = 0$ et $x = 2$. Donc

$$f(0) = f(2) = -3$$

et 0 et 2 sont deux antécédents de -3.

c) La plus petite valeur de la seconde ligne est -4, obtenue pour $x = 1$. Le tableau ne donne que quelques valeurs : on peut seulement dire que -4 **semble** être le plus petit résultat.

Remarque : les valeurs sont symétriques autour de $x = 1$, puisque $f(0) = f(2)$ et $f(-1) = f(3)$. Réponses : 0 ; 0 et 2 ; -4 pour $x = 1$.

Réponse. a) 0 · b) 0 et 2 · c) -4 pour $x = 1$.

Correction de l'exercice 6 – Compléter un tableau de valeurs

On calcule chaque image en remplaçant x par la valeur de la colonne. On élève au carré **avant** de multiplier par 2.

— $f(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $f(-1) = 2 \times 1 - 3 = -1$ et $f(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$.
— $f(1) = 2 \times 1 - 3 = -1$ et

$$f(3) = 2 \times 9 - 3 = 15$$

x	**−2**	**−1**	**0**	**1**	**3**
$f(x)$	5	−1	−3	−1	15

On remarque que $f(-1) = f(1)$: deux nombres opposés ont le même carré, donc la même image par cette fonction. La seconde ligne se complète par 5, −1, −3, −1 et 15.

Réponse. 5 ; −1 ; −3 ; −1 ; 15.

Correction de l’exercice 7 – Notation et vocabulaire

Dans l’écriture $f(a) = b$, le nombre entre parenthèses, a, est l’**antécédent**, et le résultat, b, est l’**image**. On traduit chaque phrase avec cette règle, puis on contrôle avec $f(x) = 4 - x$.

a) L’image de 3 s’écrit $f(3)$: la phrase devient $f(3) = 1$. Contrôle : $4 - 3 = 1$.

b) $f(-2) = 6$ se lit « l’image de −2 par f est 6 », ou encore « −2 est un antécédent de 6 ». Contrôle : $4 - (-2) = 6$.

c) « 0 est un antécédent de 4 » signifie que l’image de 0 est 4 :

$$f(0) = 4 - 0 = 4$$

Les trois traductions sont donc $f(3) = 1$, « l’image de −2 est 6 » et $f(0) = 4$, toutes vérifiées par le calcul.

Réponse. a) $f(3) = 1$ · b) l’image de −2 est 6 · c) $f(0) = 4$.

Correction de l’exercice 8 – Lecture graphique décrite

Un point appartient à la courbe de f quand son ordonnée est l’image de son abscisse : le point de coordonnées $(a\,;b)$ est sur la courbe si et seulement si $f(a) = b$.

a) $A(-3\,;2)$ est sur la courbe, donc $f(-3) = 2$. De même, $D(2\,;1)$ donne $f(2) = 1$.

b) Le point $C(0\,;-3)$ a pour ordonnée −3 : son abscisse, 0, est un antécédent de −3, car $f(0) = -3$.

c) Aucun point connu n’a pour abscisse 1 : on ne connaît pas $f(1)$. Entre B et D, la fonction passe de −2 à 1 ; elle prend sans doute la valeur 0 quelque part, mais rien ne dit que ce soit en $x = 1$.

Méthode : une lecture graphique ne donne que ce qui est réellement lisible ; on ne devine pas les valeurs intermédiaires. Réponses : $f(-3) = 2$, $f(2) = 1$; 0 ; non.

Réponse. a) $f(-3) = 2$ et $f(2) = 1$ · b) 0 · c) non, $f(1)$ n’est pas connu.

Correction de l’exercice 9 – Situation concrète : périmètre d’un carré

a) Un carré a quatre côtés de longueur x, donc son périmètre vaut $P(x) = 4x$.

b) On calcule l’image de 3,5 :

$$P(3{,}5) = 4 \times 3{,}5 = 14$$

Interprétation : un carré de côté 3,5 cm a un périmètre de 14 cm.

c) On cherche l’antécédent de 26 : on résout $4x = 26$, d’où $x = \dfrac{26}{4} = 6{,}5$.

Ici, seules les valeurs $x > 0$ ont un sens, car x est une longueur, même si la formule $4x$ se calcule pour tout nombre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $4 \times 6{,}5 = 26$. Résultats : $P(x) = 4x$, 14 cm, et un côté de 6,5 **cm**.

Réponse. a) $P(x) = 4x$ · b) 14 cm · c) 6,5 cm.

Correction de l'exercice 10 – Situation concrète : facture d'électricité

a) Le montant est formé de l'abonnement fixe, 12 €, et d'une partie proportionnelle à la consommation, 0,18 € par kWh : $f(x) = 0{,}18x + 12$.

b) Pour 250 kWh, on calcule l'image de 250 : $f(250) = 0{,}18 \times 250 + 12 = 45 + 12 = 57$ €.

c) On cherche l'antécédent de 75 : on résout $f(x) = 75$.

$$0{,}18x + 12 = 75 \Leftrightarrow 0{,}18x = 63 \Leftrightarrow x = \frac{63}{0{,}18} = 350$$

Contrôle : $0{,}18 \times 350 + 12 = 63 + 12 = 75$ €. La facture vaut 57 € pour 250 kWh, et une facture de 75 € correspond à 350 **kWh**.

Réponse. a) $f(x) = 0{,}18x + 12$ · b) 57 € · c) 350 kWh.

Correction de l'exercice 11 – Lire une courbe

Sur la courbe, chaque point a pour coordonnées $(x\,;f(x))$: l'image se lit sur l'axe des ordonnées, l'antécédent sur l'axe des abscisses.

a) À la verticale de $x = 1$, la courbe est à la hauteur 3 : $f(1) = 3$. À la verticale de $x = 4$, elle coupe l'axe des abscisses : $f(4) = 0$.

b) On trace la droite horizontale d'ordonnée 3 : elle coupe la courbe en deux points, d'abscisses 1 et 3. Le nombre 3 a donc deux antécédents :

$$f(1) = f(3) = 3$$

c) Le point le plus haut de la courbe est à la hauteur 4, pour $x = 2$: le plus grand résultat de f est 4. La droite horizontale d'ordonnée 5 ne rencontre pas la courbe : 5 n'a **aucun** antécédent.

Contrôle : la fonction tracée est $f(x) = -x^2 + 4x$, et $f(3) = -9 + 12 = 3$. Réponses : 3 et 0 ; 1 et 3 ; 4, et non.

Réponse. a) $f(1) = 3$ et $f(4) = 0$ · b) 1 et 3 · c) 4, atteint en $x = 2$; 5 n'a pas d'antécédent.

Correction de l'exercice 12 – Programme de calcul et fonction

a) On traduit les étapes dans l'ordre : $2x$, puis $2x + 3$, puis le carré. Donc $f(x) = (2x + 3)^2$. On calcule $f(1) = 5^2 = 25$ et $f(-2) = (-4 + 3)^2 = (-1)^2 = 1$.

b) On cherche les antécédents de 0. Un carré n'est nul que si le nombre élevé au carré est nul : $2x + 3 = 0$, d'où $x = -1{,}5$.

c) On cherche les antécédents de 9. Les nombres dont le carré vaut 9 sont 3 et -3, donc

$$2x + 3 = 3 \quad \text{ou} \quad 2x + 3 = -3$$

La première équation donne $x = 0$, la seconde $2x = -6$, soit $x = -3$.

Contrôle : $f(0) = 3^2 = 9$ et $f(-3) = (-3)^2 = 9$. Il faut choisir $-1{,}5$ pour obtenir 0, et 0 **ou** -3 pour obtenir 9.

Réponse. a) $f(x) = (2x + 3)^2$, $f(1) = 25$, $f(-2) = 1$ · b) $-1{,}5$ · c) 0 ou -3.

Correction de l'exercice 13 – Situation concrète : aire d'un rectangle

a) Le demi-périmètre vaut 10 cm : largeur et longueur ont pour somme 10, donc la longueur vaut $10 - x$. L'aire est le produit des deux dimensions :

$$A(x) = x(10 - x)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Ici x est une longueur comprise entre 0 et 10.

b) $A(3) = 3 \times 7 = 21$; $A(5) = 5 \times 5 = 25$; $A(7) = 7 \times 3 = 21$.

c) Pour $x = 3$, le rectangle mesure 3 cm sur 7 cm ; pour $x = 7$, il mesure 7 cm sur 3 cm. C'est le même rectangle, tourné d'un quart de tour : les aires sont égales. Le nombre 21 a donc deux antécédents, 3 et 7.

Remarque : parmi les valeurs calculées, la plus grande aire est obtenue pour le carré de côté 5 cm. Réponses : $A(x) = x(10 - x)$; 21, 25 et 21 cm².

Réponse. a) longueur $10 - x$, $A(x) = x(10 - x)$ · b) 21, 25 et 21 cm² · c) les rectangles 3×7 et 7×3 sont les mêmes.

Correction de l'exercice 14 – Situation concrète : chute d'un objet

a) $d(1) = 5 \times 1^2 = 5$ m et $d(2) = 5 \times 2^2 = 20$ m. Quand la durée double, la distance est multipliée par 4, et non par 2 : la distance **n'est pas** proportionnelle à la durée.

b) On cherche l'antécédent de 45 : on résout $5t^2 = 45$. On divise par 5 :

$$t^2 = 9$$

Cette équation a deux solutions, 3 et -3. Mais t est une durée écoulée depuis le lâcher, donc positive : seule $t = 3$ convient.

Contrôle : $d(3) = 5 \times 9 = 45$ m. La bille a parcouru 45 m au bout de 3 **secondes**.

Réponse. a) 5 m et 20 m ; non, la distance est multipliée par 4 quand la durée double · b) 3 s.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : vrai ou faux

Pour chaque affirmation, on calcule une image ou l'on résout une équation, selon que la phrase porte sur une image ou sur un antécédent.

a) **Vrai** : $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$.

b) **Faux** : on résout $x^2 - 1 = 3$, soit $x^2 = 4$. Cette équation a deux solutions, 2 et -2 : le nombre 3 a **deux** antécédents.

c) **Vrai** : $f(0) = 0 - 1 = -1$.

d) **Faux** : on résout $x^2 - 1 = -2$, soit

$$x^2 = -1$$

impossible, car un carré n'est jamais négatif. Le plus petit résultat possible est -1, atteint en $x = 0$. Bilan : vrai, faux, vrai, faux.

Réponse. a) vrai · b) faux (deux antécédents) · c) vrai · d) faux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).