Plaquette 4 – Lire et exploiter une représentation graphique

Notion de fonction — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le principe. Un point $M(a\,;b)$ appartient à la courbe de f si et seulement si $f(a) = b$.

Question	Geste graphique
image de a	on monte depuis a jusqu'à la courbe, on lit l'ordonnée
antécédents de k	on trace l'horizontale $y = k$, on lit les abscisses des points d'intersection
$f(x) = 0$	on repère où la courbe coupe l'axe des abscisses
$f(x) > 0$	on repère où la courbe est **au-dessus** de l'axe des abscisses
maximum	on repère le point le plus haut, on lit son ordonnée

Exemple. Pour $f(x) = x^2 - 4$, le point $M(3\,;5)$ est sur la courbe, car

$$f(3) = 3^2 - 4 = 5$$

alors que $N(1\,;2)$ n'y est pas, car $f(1) = -3 \neq 2$.

Ne pas confondre. Le maximum est une **ordonnée**. La valeur de x qui le réalise est une **abscisse**. « Le maximum est 5, atteint pour $x = 2$ » dit les deux.

Sens de variation. La fonction est **croissante** là où la courbe monte de gauche à droite, **décroissante** là où elle descend. On le résume dans un tableau de variations.

Test de la verticale. Une courbe représente une fonction si toute droite verticale la coupe **au plus une fois** : un nombre ne peut pas avoir deux images.

Précision. Une lecture graphique donne un résultat **approché**. Quand on connaît l'expression de f, on confirme toujours par le calcul.

Deux courbes. L'abscisse de leur point d'intersection est la solution de $f(x) = g(x)$; là où la première est au-dessus, $f(x) > g(x)$.

Correction de l'exercice 1 – Lire images et antécédents

Chaque colonne du tableau donne un point $(x\,;f(x))$ de la courbe : l'image se lit dans la seconde ligne, l'antécédent dans la première.

a) Colonne de -3 : $f(-3) = 4$. Colonne de 1 : $f(1) = -4$.

b) On cherche 0 dans la seconde ligne : colonnes de -2 et de 3. Ces points sont ceux où la courbe coupe l'axe des abscisses. On cherche 4 : colonnes de -3 et de 4.

$$f(-2) = f(3) = 0 \qquad f(-3) = f(4) = 4$$

c) Un point de l'axe des ordonnées a pour abscisse 0 : on lit $f(0) = -3$, donc la courbe coupe cet axe en $(0\,;-3)$.

Prudence : six points ne décrivent pas toute la courbe ; les antécédents donnés sont ceux que le tableau permet de lire. Réponses : 4 et -4 ; -2 et 3 ; -3 et 4 ; $(0\,;-3)$.

Réponse. a) 4 et -4 · b) -2 et 3 pour 0 ; -3 et 4 pour 4 · c) en $(0\,;-3)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Maximum et minimum

La courbe monte jusqu'en $x = 2$, puis descend jusqu'en $x = 6$. Le point le plus haut est donc celui d'abscisse 2 :

$$g(2) = 7$$

Le maximum vaut 7, atteint pour $x = 2$. On dit « le maximum **vaut** 7 », et non « le maximum est 2 » : 2 est la valeur de x qui le réalise.

Le point le plus bas se trouve à l'une des deux extrémités, puisque la courbe monte puis descend. On compare $g(-2) = -1$ et $g(6) = -5$: le minimum vaut -5, atteint pour $x = 6$.

On en déduit que 3 a deux antécédents, 0 et 4, et que 8 n'en a aucun, car il dépasse le maximum.

Conclusion : maximum 7 pour $x = 2$, minimum -5 pour $x = 6$.

Réponse. Maximum 7 pour $x = 2$; minimum -5 pour $x = 6$.

Correction de l'exercice 3 – Résoudre graphiquement

Résoudre graphiquement $f(x) = k$, c'est tracer la droite horizontale d'ordonnée k et lire les abscisses de ses points d'intersection avec la courbe.

— $f(x) = 0$: la droite est l'axe des abscisses ; la courbe le coupe en $x = -1$ et $x = 3$.
— $f(x) = -3$: la droite d'ordonnée -3 coupe la courbe en $x = 0$ et $x = 2$.
— $f(x) = 5$: la droite d'ordonnée 5 coupe la courbe en $x = -2$ et $x = 4$.

$$f(-1) = f(3) = 0 \qquad f(0) = f(2) = -3 \qquad f(-2) = f(4) = 5$$

Le point le plus bas de la courbe est $(1\,;-4)$: une droite horizontale située plus bas, comme $y = -5$, ne rencontrerait pas la courbe, et $f(x) = -5$ n'aurait aucune solution.

Conclusion : $\{-1\,;3\}$, $\{0\,;2\}$ et $\{-2\,;4\}$.

Réponse. $f(x) = 0$: -1 et 3 · $f(x) = -3$: 0 et 2 · $f(x) = 5$: -2 et 4.

Correction de l'exercice 4 – Le signe d'une fonction

On traduit la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses : « au-dessus » signifie $f(x) > 0$, « en dessous » signifie $f(x) < 0$, et « sur l'axe » signifie $f(x) = 0$.

— $f(x) = 0$ aux points où la courbe coupe l'axe : $x = -1$ ou $x = 3$.
— La courbe est en dessous de l'axe entre ces deux valeurs :

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

— Elle est au-dessus ailleurs : $f(x) > 0$ pour $x < -1$ ou $x > 3$.

Les bornes -1 et 3 sont exclues des inégalités strictes, car f y vaut 0. Les trois ensembles réunis couvrent tous les nombres.

Contrôle avec une fonction qui convient, $f(x) = (x + 1)(x - 3)$: $f(0) = -3 < 0$ et $f(5) = 12 > 0$. Réponses : $f(x) = 0$ pour -1 et 3 ; $f(x) < 0$ sur $]-1\,;3[$; $f(x) > 0$ ailleurs.

Réponse. $f(x) = 0$ en -1 et 3 ; $f(x) < 0$ sur $]-1\,;3[$; $f(x) > 0$ ailleurs.

Correction de l'exercice 5 – Sens de variation

On décrit les variations morceau par morceau, en donnant les images aux bornes.

— De $x = -4$ à $x = -1$, la courbe descend : f est **décroissante**, de 2 à -5.
— De $x = -1$ à $x = 3$, elle monte : f est **croissante**, de -5 à 6.
— De $x = 3$ à $x = 5$, elle descend : f est **décroissante**, de 6 à 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

x	-4	-1	3	5
$f(x)$	2	-5	6	1

Le point le plus haut est atteint en $x = 3$ et le plus bas en $x = -1$; toutes les autres images restent entre -5 et 6 :

$$-5 \leq f(x) \leq 6$$

Conclusion : décroissante, puis croissante, puis décroissante ; maximum 6 en $x = 3$, minimum -5 en $x = -1$.

Réponse. Décroissante puis croissante puis décroissante ; maximum 6 en $x = 3$, minimum -5 en $x = -1$.

Correction de l'exercice 6 – Un point appartient-il à la courbe ?

Un point $M(a\,;b)$ appartient à la courbe de f si et seulement si $f(a) = b$: on calcule l'image de l'abscisse et on la compare à l'ordonnée.

— $A(2\,;5)$: $f(2) = 2 \times 4 - 3 = 5$, égal à l'ordonnée de A. Le point A **appartient** à la courbe.

— $B(-1\,;1)$: $f(-1) = 2 \times 1 - 3 = -1$, différent de 1. Le point B n'appartient **pas** à la courbe ; le point de la courbe d'abscisse -1 est $(-1\,;-1)$.

— $C(0\,;-3)$: $f(0) = -3$. Le point C **appartient** à la courbe : c'est son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

$$f(2) = 5 \qquad f(-1) = -1 \neq 1 \qquad f(0) = -3$$

Conclusion : A et C sont sur la courbe, B n'y est pas.

Réponse. A et C appartiennent à la courbe, B non.

Correction de l'exercice 7 – Est-ce la courbe d'une fonction ?

Une fonction associe à chaque nombre **une seule** image. Les points $(1\,;2)$ et $(1\,;-2)$ ont la même abscisse, 1, mais des ordonnées différentes : si la courbe représentait une fonction f, on aurait à la fois

$$f(1) = 2 \quad \text{et} \quad f(1) = -2$$

ce qui est impossible. La courbe ne peut donc pas représenter une fonction. Graphiquement, la droite verticale d'abscisse 1 la coupe deux fois ; c'est le cas d'un cercle, par exemple.

En revanche, deux points de même **ordonnée** sont permis : avec $f(x) = x^2$, on a $f(1) = f(-1) = 1$, et le nombre 1 a simplement deux antécédents.

Conclusion : non, car le nombre 1 aurait deux images. Plusieurs antécédents sont possibles, plusieurs images jamais.

Réponse. Non : 1 aurait deux images, ce qu'une fonction interdit.

Correction de l'exercice 8 – Associer courbe et expression

On teste chaque expression sur les abscisses du tableau et l'on cherche la courbe qui donne les mêmes ordonnées.

— x^2 : en 0, elle vaut 0, ce qui laisse C_1 et C_3. En -1, elle vaut $(-1)^2 = 1$: seule C_1 convient ; en 2, on trouve bien 4.

— $2x + 3$: en 0, elle vaut 3 ; seule C_2 passe par $(0\,;3)$. En 1 et en -1, on trouve 5 et 1, comme dans le tableau.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $2x$: en -1, elle vaut -2 ; seule C_3 passe par $(-1\,;-2)$.

$$C_1 : x^2 \qquad C_2 : 2x+3 \qquad C_3 : 2x$$

Piège : C_1 et C_3 passent toutes deux par $(0\,;0)$ et par $(2\,;4)$; c'est le point d'abscisse -1 qui les distingue. Un ou deux points communs ne suffisent pas à identifier une courbe.

Réponse. $C_1 : x^2$ · $C_2 : 2x+3$ · $C_3 : 2x$.

Correction de l'exercice 9 – Deux courbes à comparer

a) $f(x) = g(x)$ signifie que les deux courbes ont un point commun. Elles se coupent seulement en $(2\,;4)$, donc l'équation a une seule solution, $x = 2$.

b) $f(x) > g(x)$ signifie que la courbe de f est **au-dessus** de celle de g. C'est le cas à gauche du point d'intersection :

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x < 2$$

La borne 2 est exclue, car en $x = 2$ les deux images sont égales.

c) Le point $(2\,;4)$ est sur la courbe de f, donc $f(2) = 4$; il est aussi sur celle de g, donc $g(2) = 4$.

Conclusion : $x = 2$; $x < 2$, soit $]-\infty\,;2[$; $f(2) = 4$.

Réponse. a) $x = 2$ · b) $x < 2$ · c) $f(2) = 4$.

Correction de l'exercice 10 – Un trajet en voiture

a) Entre 1 h et 1 h 30, la distance reste égale à 60 km : la voiture ne roule pas, elle est **à l'arrêt** pendant 30 minutes. Sur le graphique, le segment correspondant est horizontal.

b) La vitesse moyenne est la distance parcourue divisée par la durée. Première phase : 60 km en 1 h, soit 60 km/h. Seconde phase, de 1,5 h à 2,5 h : $120 - 60 = 60$ km en 1 h, soit 60 km/h. Les deux segments ont la même pente.

c) Sur l'ensemble du trajet, la durée compte l'arrêt :

$$v = \frac{120}{2{,}5} = 48 \text{ km/h}$$

Cette vitesse est inférieure à 60 km/h, car la voiture n'a pas roulé pendant une demi-heure. Une vitesse moyenne n'est pas la moyenne des vitesses.

Réponses : arrêt de 30 **min** ; 60 **km/h** sur chaque phase ; 48 **km/h** sur l'ensemble.

Réponse. a) arrêt de 30 min · b) 60 km/h sur chaque phase · c) 48 km/h au total.

Correction de l'exercice 11 – La température d'une journée

a) La plus haute température relevée est 21 degrés, à 15 h ; la plus basse est 8 degrés, à 6 h. C'est cohérent : il fait le plus chaud en milieu d'après-midi et le plus frais au petit matin.

b) L'amplitude thermique est l'écart entre ces deux extrêmes :

$$21 - 8 = 13 \text{ degrés}$$

c) Les relevés de 12 h, 15 h et 18 h dépassent 15 degrés, ceux de 9 h et de 21 h non. Le passage à 15 degrés a donc lieu entre 9 h et 12 h à la montée, puis entre 18 h et 21 h à la descente. Sur le graphique, la droite horizontale d'ordonnée 15 coupe la ligne vers 10 h 30 et vers 19 h.

Prudence : ces heures sont approchées, car on ne connaît pas la température entre deux relevés. Réponses : maximum à 15 h, minimum à 6 h ; 13 degrés ; environ **de** 10 **h** 30 **à** 19 **h**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) maximum 21 à 15 h, minimum 8 à 6 h · b) 13 degrés · c) environ de 10 h 30 à 19 h.

Correction de l’exercice 12 – Le remplissage d’un bassin

a) De 0 à 10 min, le volume passe de 50 L à 350 L : c’est un **remplissage**. De 10 à 20 min, il reste à 350 L : c’est une **pause**. À partir de 20 min, il diminue : c’est une **vidange**.

b) Le débit est le volume écoulé par minute. Au remplissage, $\frac{350-50}{10} = 30$ L/min. À la vidange, $\frac{350-200}{5} = 30$ L/min. Les deux débits sont égaux.

c) À 25 min, il reste 200 L. Au rythme de 30 L/min, il faut encore

$$\frac{200}{30} \approx 6{,}7 \text{ min}$$

soit environ 6 min 40 s. Le bassin sera vide vers $25 + 6{,}7 \approx 31{,}7$ min.

Contrôle : à 30 min, il resterait $200 - 150 = 50$ L. Le bassin sera vide **vers** 31 **min** 40 **s**.

Réponse. a) remplissage, pause, vidange · b) 30 L/min dans les deux cas · c) vers 31 min 40 s.

Correction de l’exercice 13 – Deux tarifs sur un graphique

a) Le tarif A est proportionnel au nombre de copies : $f(x) = 0{,}8x$, fonction linéaire. Le tarif B a une part fixe et une part variable : $g(x) = 0{,}2x + 12$, fonction affine.

b) Les droites se coupent quand les coûts sont égaux :

$$0{,}8x = 0{,}2x + 12 \Leftrightarrow 0{,}6x = 12 \Leftrightarrow x = 20$$

Le coût vaut alors $0{,}8 \times 20 = 16$ € ; le point d’intersection est $(20\,;16)$.

c) Pour 50 copies, A coûte $0{,}8 \times 50 = 40$ € et B coûte $0{,}2 \times 50 + 12 = 22$ €. Au-delà de 20 copies, la droite de B est en dessous de celle de A.

Contrôle : $g(20) = 4 + 12 = 16$ €. Réponses : $f(x) = 0{,}8x$ et $g(x) = 0{,}2x + 12$; $(20\,;16)$; le **tarif B**.

Réponse. a) $f(x) = 0{,}8x$ et $g(x) = 0{,}2x + 12$ · b) $(20\,;16)$ · c) le tarif B (22 € contre 40 €).

Correction de l’exercice 14 – Une inéquation graphique

$f(x) \leq 0$ signifie que la courbe est **en dessous** de l’axe des abscisses, ou sur cet axe. La parabole coupe l’axe en -2 et en 2, et elle est en dessous entre ces deux points :

$$-2 \leq x \leq 2$$

Les bornes sont incluses, car l’inégalité est large : $f(-2) = f(2) = 0$.

Par le calcul, $x^2 - 4 \leq 0$ s’écrit $x^2 \leq 4$: le carré de x ne dépasse pas 4, ce qui se produit exactement quand x est compris entre -2 et 2.

Piège : écrire seulement $x \leq 2$ inclurait -5, qui ne convient pas, car $f(-5) = 21 > 0$.

Contrôle : $f(0) = -4 \leq 0$ et $f(3) = 5 > 0$. Les solutions forment l’intervalle $[-2\,;2]$.

Réponse. $-2 \leq x \leq 2$, soit $[-2\,;2]$.

Correction de l’exercice 15 – Reconstituer une expression

a) Une fonction affine s’écrit $f(x) = ax + b$. Le point $A(0\,;5)$ donne $f(0) = b = 5$. Le coefficient a est la variation des images divisée par celle des abscisses, entre A et B :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$a = \frac{-3-5}{4-0} = \frac{-8}{4} = -2$$

donc $f(x) = -2x + 5$. On vérifie avec B : $f(4) = -8 + 5 = -3$.

b) $f(10) = -20 + 5 = -15$. Pour l'antécédent de 1, on résout $-2x + 5 = 1$, soit $-2x = -4$ et $x = 2$.

c) La courbe coupe l'axe des abscisses quand $f(x) = 0$: $-2x + 5 = 0$ donne $x = 2{,}5$, d'où le point $(2{,}5\,;0)$.

Comme $a = -2 < 0$, la fonction est décroissante : $f(0) = 5 > f(4) = -3$. Réponses : $f(x) = -2x + 5$; -15 et 2 ; $(2{,}5\,;0)$.

Réponse. a) $f(x) = -2x + 5$ · b) $f(10) = -15$ et l'antécédent de 1 est 2 · c) en $(2{,}5\,;0)$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : exploiter une courbe

a) La courbe descend jusqu'en $x = 1$ puis monte : le point le plus bas est celui d'abscisse 1. Le minimum vaut -4, atteint pour $x = 1$.

b) Les images nulles sont dans les colonnes de -1 et de 3 : $f(x) = 0$ pour $x = -1$ ou $x = 3$. Entre ces deux valeurs, la courbe passe par son point le plus bas, -4 : elle est sous l'axe des abscisses, donc

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

c) La courbe descend puis monte : elle croise deux fois la droite horizontale d'ordonnée 12, en $x = -3$ et $x = 5$. Le nombre 12 a **deux** antécédents.

d) Avec l'expression admise, $f(2) = (2-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$, égal à l'ordonnée de D : le point D est sur la courbe.

Contrôle de l'expression : $f(5) = 16 - 4 = 12$ et $f(-1) = 4 - 4 = 0$, conformes au tableau. Réponses : -4 en $x = 1$; -1 et 3, puis $]-1\,;3[$; deux ; oui.

Réponse. a) minimum -4 en $x = 1$ · b) -1 et 3 ; $]-1\,;3[$ · c) deux · d) oui.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).