Plaquette 5 – Modéliser une situation par une fonction

Notion de fonction — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les quatre temps.

Temps	Ce qu'on écrit
choisir la variable	« Soit x le nombre de … », avec l'unité
écrire la fonction	$f(x) = \ldots$, en justifiant chaque terme
répondre	image si on connaît x, antécédent si on connaît $f(x)$
conclure	une phrase avec l'unité, et un contrôle de vraisemblance

Reconnaître le type de fonction.

Situation	Fonction
grandeur proportionnelle	linéaire, $f(x) = ax$
part fixe plus part variable	affine, $f(x) = ax + b$
aire d'une figure dont un côté varie	avec un x^2
volume d'un solide dont une arête varie	avec un x^2 ou un x^3

Traduire une question.

Question de l'énoncé	Travail mathématique
« combien coûte … pour 12 … ? »	calculer $f(12)$
« pour quel nombre le coût vaut-il 48 € ? »	résoudre $f(x) = 48$
« à partir de quand dépasse-t-on … ? »	résoudre une inéquation
« quel est le maximum ? »	mettre sous forme canonique

Le domaine de validité. Un nombre d'objets est un entier positif ; une longueur est positive ; une durée aussi. On précise ces contraintes et on rejette ensuite les solutions qui ne les respectent pas.

Forme canonique pour un maximum. Si $f(x) = x(a - x)$, alors

$$f(x) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

le maximum vaut $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, atteint pour $x = \frac{a}{2}$.

Correction de l'exercice 1 – Un abonnement de sport

a) Le coût se compose d'une part fixe, l'inscription de 25 €, et d'une part qui augmente de 6 € à chaque séance : $f(x) = 6x + 25$. C'est une fonction affine ; pour $x = 0$, on retrouve l'inscription seule.

b) On calcule l'image de 12 : $f(12) = 72 + 25 = 97$ €.

c) On cherche l'antécédent de 145 :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$6x + 25 = 145 \Leftrightarrow 6x = 120 \Leftrightarrow x = 20$$

Le coût moyen par séance baisse quand on vient plus souvent, $\frac{97}{12} \approx 8{,}08$ € puis $\frac{145}{20} = 7{,}25$ €, car l'inscription se répartit sur plus de séances ; il reste toujours supérieur à 6 €.

Contrôle : $6 \times 20 + 25 = 145$ €. Réponses : $f(x) = 6x + 25$; 97 **€** ; 20 **séances**.

Réponse. a) $f(x) = 6x + 25$ · b) 97 € · c) 20 séances.

Correction de l'exercice 2 – Le périmètre d'un carré

a) Le carré a quatre côtés de x cm, donc $P(x) = 4x$, fonction linéaire. Son aire est le côté au carré : $A(x) = x^2$, qui n'est pas linéaire.

b) $P(7) = 28$ cm et $A(7) = 49$ cm².

c) Pour le périmètre, on résout $4x = 48$, d'où $x = 12$ cm. Pour l'aire, on résout

$$x^2 = 49$$

qui a deux solutions, 7 et -7 ; un côté est positif, donc $x = 7$ cm.

On remarque que doubler le côté double le périmètre, $P(14) = 56$, mais **quadruple** l'aire, $A(14) = 196 = 4 \times 49$: l'aire dépend du carré du côté.

Réponses : $4x$ et x^2 ; 28 cm et 49 cm² ; 12 **cm** et 7 **cm**.

Réponse. a) $P(x) = 4x$ et $A(x) = x^2$ · b) 28 cm et 49 cm² · c) 12 cm et 7 cm.

Correction de l'exercice 3 – Le taxi

a) Le prix se compose de la prise en charge fixe, 3,50 €, et de 1,20 € par kilomètre : $p(d) = 1{,}2d + 3{,}5$, fonction affine.

b) $p(8) = 1{,}2 \times 8 + 3{,}5 = 9{,}6 + 3{,}5 = 13{,}10$ €.

c) On cherche l'antécédent de 21,5 :

$$1{,}2d + 3{,}5 = 21{,}5 \Leftrightarrow 1{,}2d = 18 \Leftrightarrow d = 15$$

Le prix moyen au kilomètre baisse avec la distance, environ 1,64 € pour 8 km et 1,43 € pour 15 km, car la prise en charge se répartit sur plus de kilomètres.

Contrôle : $1{,}2 \times 15 + 3{,}5 = 18 + 3{,}5 = 21{,}50$ €. Réponses : $p(d) = 1{,}2d + 3{,}5$; 13,10 **€** ; 15 **km**.

Réponse. a) $p(d) = 1{,}2d + 3{,}5$ · b) 13,10 € · c) 15 km.

Correction de l'exercice 4 – Le rectangle de périmètre fixé

a) Le demi-périmètre vaut 12 cm, donc la largeur mesure $12 - x$, avec $0 < x < 12$. L'aire vaut $A(x) = x(12 - x)$.

b) $A(8) = 8 \times 4 = 32$ cm² et $A(5) = 5 \times 7 = 35$ cm² : une longueur plus grande ne donne pas forcément une aire plus grande.

c) On développe la forme proposée : $36 - (x - 6)^2 = 36 - (x^2 - 12x + 36) = 12x - x^2$, c'est bien $A(x)$. Or un carré est toujours positif ou nul : $(x - 6)^2 \geq 0$, donc

$$A(x) = 36 - (x - 6)^2 \leq 36$$

L'égalité a lieu quand $(x - 6)^2 = 0$, soit $x = 6$. La largeur vaut alors $12 - 6 = 6$ cm : le rectangle d'aire maximale est un **carré**.

Contrôle : $A(6) = 6 \times 6 = 36$ cm². L'aire maximale vaut 36 **cm²**.

Réponse. a) $A(x) = x(12 - x)$ · b) 32 et 35 cm² · c) 36 cm², pour un carré de 6 cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – La boîte sans couvercle

a) Le volume est l’aire de la base multipliée par la hauteur : $V(x) = 4x^2$. Sans couvercle, le carton comprend la base, d’aire x^2, et quatre faces latérales de x sur 4, d’aire totale $16x$:

$$C(x) = x^2 + 16x$$

b) $V(6) = 4 \times 36 = 144$ cm³ et $C(6) = 36 + 96 = 132$ cm².

c) On résout $4x^2 = 324$. En divisant par 4, $x^2 = 81$, qui a deux solutions, 9 et -9 ; un côté est positif, donc $x = 9$ cm.

En passant de 6 à 9 cm, le côté est multiplié par 1,5 et le volume par $1{,}5^2 = 2{,}25$: le volume dépend du carré du côté.

Contrôle : $4 \times 81 = 324$ cm³. Réponses : $4x^2$ et $x^2 + 16x$; 144 cm³ et 132 cm² ; $x = 9$ **cm**.

Réponse. a) $V(x) = 4x^2$ et $C(x) = x^2 + 16x$ · b) 144 cm³ et 132 cm² · c) $x = 9$ cm.

Correction de l’exercice 6 – Deux forfaits téléphoniques

a) Le forfait A coûte toujours 15 € : $f(t) = 15$, fonction constante. Le forfait B a une part fixe et une part par minute : $g(t) = 0{,}25t + 5$.

b) Pour 30 minutes, A coûte 15 € et B coûte $0{,}25 \times 30 + 5 = 12{,}50$ € : B est moins cher.

c) A est plus avantageux quand B coûte davantage :

$$0{,}25t + 5 > 15 \Leftrightarrow 0{,}25t > 10 \Leftrightarrow t > 40$$

À 40 minutes, les deux forfaits coûtent 15 € ; au-delà, A devient plus avantageux, car son prix ne bouge plus alors que celui de B continue d’augmenter.

Contrôle à 60 minutes : B coûte 20 €, contre 15 € pour A. Réponses : $f(t) = 15$ et $g(t) = 0{,}25t + 5$; 15 € et 12,50 € ; **au-delà de** 40 **minutes**.

Réponse. a) $f(t) = 15$ et $g(t) = 0{,}25t + 5$ · b) 15 € et 12,50 € · c) au-delà de 40 minutes.

Correction de l’exercice 7 – La remise sur un article

a) Une remise de 30 % revient à payer 70 % du prix affiché, c’est-à-dire à multiplier par $1 - 0{,}3 = 0{,}7$: $f(p) = 0{,}7p$, fonction linéaire.

b) $f(85) = 0{,}7 \times 85 = 59{,}50$ €. La remise vaut $85 - 59{,}50 = 25{,}50$ €, soit bien 30 % de 85.

c) On cherche l’antécédent de 63 :

$$0{,}7p = 63 \Leftrightarrow p = \frac{63}{0{,}7} = 90$$

Erreur classique : ajouter 30 % à 63 €, ce qui donne 81,90 €. C’est faux, car la remise est calculée sur le prix **affiché**, pas sur le prix payé.

Contrôle : $0{,}7 \times 90 = 63$ €. Réponses : $f(p) = 0{,}7p$; 59,50 **€** ; 90 **€**.

Réponse. a) $f(p) = 0{,}7p$ · b) 59,50 € · c) 90 €.

Correction de l’exercice 8 – La chute d’un objet

a) $d(1) = 5 \times 1 = 5$ m, $d(2) = 5 \times 4 = 20$ m et $d(3) = 5 \times 9 = 45$ m.

b) On cherche l’antécédent de 80 : $5t^2 = 80$, donc

$$t^2 = 16$$

Cette équation a deux solutions, 4 et -4 ; une durée est positive, donc $t = 4$ s.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Si la distance était proportionnelle au temps, le quotient $\frac{d(t)}{t}$ serait constant. Or $\frac{5}{1} = 5$ et $\frac{20}{2} = 10$: ce n'est pas le cas. Doubler la durée **quadruple** la distance, car elle dépend du carré du temps. L'objet accélère : il parcourt 5 m pendant la première seconde, mais $45 - 20 = 25$ m pendant la troisième.

Contrôle : $5 \times 16 = 80$ m. Réponses : 5, 20 et 45 m ; 4 **s** ; non.

Réponse. a) 5, 20 et 45 m · b) 4 secondes · c) non, la distance dépend du carré du temps.

Correction de l'exercice 9 – Le bénéfice d'un artisan

a) Le bénéfice est la recette moins les coûts. Le signe moins s'applique à toute la parenthèse :

$$B(x) = 30x - (x^2 + 200) = -x^2 + 30x - 200$$

b) $B(10) = -100 + 300 - 200 = 0$ € : à 10 objets, l'artisan rentre tout juste dans ses frais. $B(25) = -625 + 750 - 200 = -75$ € : il perd de l'argent, car les coûts augmentent plus vite que la recette.

c) On développe la forme proposée :
$25 - (x - 15)^2 = 25 - x^2 + 30x - 225 = -x^2 + 30x - 200$, c'est bien $B(x)$. Comme $(x - 15)^2 \geq 0$, on a $B(x) \leq 25$, avec égalité pour $x = 15$.

Contrôle : $B(15) = -225 + 450 - 200 = 25$ €, et $B(14) = B(16) = 24$ €. Le bénéfice est maximal pour 15 **objets** et vaut 25 **€**.

Réponse. a) $B(x) = -x^2 + 30x - 200$ · b) 0 € et −75 € · c) 15 objets, pour 25 € de bénéfice.

Correction de l'exercice 10 – La pelouse à tondre

a) L'allée longe les quatre bords : chaque dimension perd $2x$, une fois de chaque côté. Il reste un rectangle de $30 - 2x$ sur $20 - 2x$, avec $0 \leq x < 10$:

$$P(x) = (30 - 2x)(20 - 2x)$$

b) $P(2) = 26 \times 16 = 416$ m².

c) D'après b), une allée de 2 m convient. C'est la seule : quand x augmente, les deux dimensions de la pelouse diminuent, donc son aire diminue aussi. Une largeur plus petite que 2 m donnerait plus de 416 m², une largeur plus grande en donnerait moins.

L'allée occupe alors $600 - 416 = 184$ m².

Contrôle : pour $x = 0$, on retrouve $30 \times 20 = 600$ m², l'aire du terrain. Réponses : $P(x) = (30 - 2x)(20 - 2x)$; 416 m² ; $x = 2$ **m**.

Réponse. a) $P(x) = (30 - 2x)(20 - 2x)$ · b) 416 m² · c) $x = 2$ m.

Correction de l'exercice 11 – La consommation d'eau

a) La facture comprend l'abonnement fixe et le prix de l'eau consommée :
$f(v) = 3{,}2v + 48$.

b) $f(60) = 192 + 48 = 240$ €.

c) On cherche l'antécédent de 432 :

$$3{,}2v + 48 = 432 \Leftrightarrow 3{,}2v = 384 \Leftrightarrow v = 120$$

d) Le prix moyen du mètre cube est la facture divisée par le volume : $\frac{432}{120} = 3{,}60$ €. Il dépasse le tarif de 3,20 €, car l'abonnement s'ajoute : $\frac{48}{120} = 0{,}40$ € par mètre cube.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pour 60 m³, le prix moyen serait de $\frac{240}{60} = 4$ € : plus on consomme, plus le prix moyen baisse.

Contrôle : $3{,}2 \times 120 + 48 = 432$ €. Réponses : $f(v) = 3{,}2v + 48$; 240 € ; 120 **m³** ; 3,60 **€**.

Réponse. a) $f(v) = 3{,}2v + 48$ · b) 240 € · c) 120 m³ · d) 3,60 € le mètre cube.

Correction de l’exercice 12 – Le triangle variable

a) L’aire d’un triangle vaut la base multipliée par la hauteur, divisé par 2 : $A(x) = \frac{x(x+6)}{2}$, avec $x > 0$.

b) $A(4) = \frac{4 \times 10}{2} = 20$ cm² et $A(10) = \frac{10 \times 16}{2} = 80$ cm².

c) On veut $\frac{x(x+6)}{2} = 56$, soit $x(x+6) = 112$, ou encore $x(x+6) - 112 = 0$. On développe la forme proposée : $(x-8)(x+14) = x^2 + 14x - 8x - 112 = x^2 + 6x - 112$, égale à $x(x+6) - 112$. L’équation devient

$$(x-8)(x+14) = 0$$

d’où $x = 8$ ou $x = -14$; une base est positive, donc $x = 8$ cm, et la hauteur vaut 14 cm.

Contrôle : $\frac{8 \times 14}{2} = 56$ cm². La base mesure 8 **cm**.

Réponse. a) $A(x) = \frac{x(x+6)}{2}$ · b) 20 et 80 cm² · c) base de 8 cm.

Correction de l’exercice 13 – Le champ clôturé

a) La clôture forme deux largeurs, perpendiculaires au mur, et une longueur, le long du mur. La longueur vaut donc $200 - 2x$, avec $0 < x < 100$, et l’aire :

$$A(x) = x(200 - 2x)$$

b) $A(40) = 40 \times 120 = 4800$ m².

c) On développe la forme proposée : $5000 - 2(x-50)^2 = 5000 - 2x^2 + 200x - 5000 = 200x - 2x^2$, c’est bien $A(x)$. Comme $(x-50)^2 \geq 0$, on a $A(x) \leq 5000$, avec égalité pour $x = 50$.

La longueur le long du mur vaut alors $200 - 100 = 100$ m : elle est le double de la largeur.

Contrôle : $50 \times 100 = 5000$ m² et $50 + 50 + 100 = 200$ m de clôture. L’aire maximale vaut 5000 **m²**, pour $x = 50$ m.

Réponse. a) $A(x) = x(200 - 2x)$ · b) 4800 m² · c) 5000 m², pour $x = 50$ m.

Correction de l’exercice 14 – Deux offres de livraison

a) Le site A est proportionnel au nombre d’articles : $f(n) = 4n$. Le site B a une part fixe et une part par article : $g(n) = 2{,}5n + 9$.

b) B est plus avantageux quand il coûte moins cher :

$$2{,}5n + 9 < 4n \Leftrightarrow 9 < 1{,}5n \Leftrightarrow n > 6$$

On divise par 1,5, positif, donc le sens est conservé. À 6 articles, les deux sites coûtent 24 € ; le nombre d’articles étant entier, B est plus avantageux à partir de 7 articles.

c) Pour 20 articles, A coûte 80 € et B coûte $50 + 9 = 59$ €, soit 21 € de moins. Chaque article au-delà du sixième fait gagner 1,50 € : $1{,}5 \times 14 = 21$ €.

Réponses : $f(n) = 4n$ et $g(n) = 2{,}5n + 9$; **à partir de** 7 **articles** ; 80 € contre 59 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $f(n) = 4n$ et $g(n) = 2{,}5n + 9$ · b) à partir de 7 articles · c) 80 € contre 59 €, soit 21 € d'écart.

Correction de l'exercice 15 – Les quatre coins découpés

a) On retire quatre petits carrés d'aire x^2 chacun au grand carré d'aire 100 cm² :

$$R(x) = 100 - 4x^2$$

Les coins ne doivent pas se chevaucher : $0 \leq x \leq 5$.

b) $R(2) = 100 - 4 \times 4 = 84$ cm².

c) On résout $100 - 4x^2 = 64$. On retranche 100 : $-4x^2 = -36$, puis on divise par -4 : $x^2 = 9$. Les solutions sont 3 et -3 ; une longueur est positive, donc $x = 3$ cm, qui respecte bien $x \leq 5$.

Pour $x = 5$, les quatre coins recouvriraient tout le carré et l'aire restante serait nulle.

Contrôle : $100 - 4 \times 9 = 64$ cm². Réponses : $R(x) = 100 - 4x^2$; 84 cm² ; $x = 3$ **cm**.

Réponse. a) $R(x) = 100 - 4x^2$ · b) 84 cm² · c) $x = 3$ cm.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : la location de salle

a) Le coût comprend la location fixe et 12 € par participant : $f(n) = 12n + 180$.

b) $f(25) = 300 + 180 = 480$ €.

c) Le coût ne doit pas dépasser 600 € :

$$12n + 180 \leq 600 \Leftrightarrow 12n \leq 420 \Leftrightarrow n \leq 35$$

Il peut y avoir au plus 35 participants ; à 36, le coût serait de 612 €.

d) Le coût par participant est le coût total divisé par le nombre de participants : $g(n) = \dfrac{12n + 180}{n} = 12 + \dfrac{180}{n}$. Ainsi $g(25) = 12 + 7{,}2 = 19{,}20$ € et $g(50) = 12 + 3{,}6 = 15{,}60$ €. Il diminue quand le groupe grandit, car la location se partage entre plus de personnes, mais il reste au-dessus de 12 €.

Réponses : $f(n) = 12n + 180$; 480 € ; 35 **participants** ; 19,20 **€** puis 15,60 **€**.

Réponse. a) $f(n) = 12n + 180$ · b) 480 € · c) 35 participants · d) 19,20 € puis 15,60 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).