Plaquette 2 – Dénombrer les issues et calculer une probabilité

Probabilités — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire.

Terme	Définition
issue	un résultat possible de l'expérience
univers	l'ensemble de toutes les issues
événement	un ensemble d'issues
issue favorable	une issue qui réalise l'événement

Situation d'équiprobabilité. Toutes les issues ont la même probabilité (dé équilibré, tirage au hasard, pièce non truquée) :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$$

Bornes. Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1.

Valeur	Signification
0	événement impossible
1	événement certain
0,5	une chance sur deux

Somme. La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1. C'est le contrôle systématique d'un tableau de probabilités.

Expériences de référence.

Expérience	Nombre d'issues
lancer d'une pièce	2
lancer d'un dé à six faces	6
tirage d'une carte dans un jeu de 52	52
tirage dans une urne de n boules	n

Exprimer une probabilité. Fraction simplifiée, écriture décimale ou pourcentage : les trois sont acceptées, mais la fraction est la forme exacte.

Attention aux situations non équiprobables. Roue à secteurs inégaux, dé pipé, urne où l'on compte les couleurs et non les boules : la formule des issues favorables ne s'applique plus telle quelle.

Correction de l'exercice 1 – Un dé équilibré

Le dé est équilibré : les 6 faces ont la même probabilité, $\frac{1}{6}$. La probabilité d'un événement est alors le nombre d'issues favorables divisé par 6.

a) Nombres pairs : 2, 4, 6, soit 3 issues : $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Strictement supérieur à 4 : 5 et 6, soit $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

c) Multiples de 3 : 3 et 6, soit $P = \frac{1}{3}$.

d) Aucune face ne porte le 7 : c'est un événement **impossible**,

$$P = \frac{0}{6} = 0$$

À l'inverse, « obtenir un nombre entre 1 et 6 » est un événement certain, de probabilité 1.

Réponse. a) $\frac{1}{2}$ · b) $\frac{1}{3}$ · c) $\frac{1}{3}$ · d) 0.

Correction de l'exercice 2 – Un sac de boules

a) Il y a $5 + 4 + 3 = 12$ boules, indiscernables au toucher : les 12 issues sont équiprobables.

b) La probabilité d'une couleur est le nombre de boules de cette couleur divisé par 12 :

$$P(\text{rouge}) = \frac{5}{12} \qquad P(\text{bleu}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \qquad P(\text{vert}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

c) $\frac{5}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{12}{12} = 1$: la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1. Le rouge est la couleur la plus probable ; ne pas tirer de vert a une probabilité de $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Réponse. a) 12 · b) $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ · c) la somme vaut 1.

Correction de l'exercice 3 – Un jeu de 52 cartes

Le jeu compte 52 cartes, également probables : 4 couleurs (cœur, carreau, pique, trèfle) de 13 cartes.

a) Il y a 13 cœurs : $P = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

b) Il y a 4 rois, un par couleur : $P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

c) Il n'y a qu'un roi de cœur : $P = \frac{1}{52}$.

d) Chaque couleur compte 3 figures, soit $4 \times 3 = 12$ figures :

$$P = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

Par conséquent, ne pas tirer de figure a une probabilité de $1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$.

Réponse. a) $\frac{1}{4}$ · b) $\frac{1}{13}$ · c) $\frac{1}{52}$ · d) $\frac{3}{13}$.

Correction de l'exercice 4 – Une probabilité manquante

a) La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1 :

$$P(D) = 1 - (0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}15) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

b) Les probabilités valent 0,3, 0,25, 0,15 et 0,3 : A et D sont les plus probables, à égalité ; C est le moins probable (son secteur ne mesure que $0{,}15 \times 360 = 54°$).

c) Sur un grand nombre de tours, la fréquence d'une issue se rapproche de sa probabilité. On peut donc s'attendre à obtenir D environ $0{,}3 \times 400 = 120$ fois. C'est une estimation : le résultat réel variera un peu autour de cette valeur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $P(D) = 0{,}3$ · b) A et D · c) environ 120 fois.

Correction de l’exercice 5 – Les lettres d’un mot

a) Le mot ANNIVERSAIRE s’écrit avec 12 lettres : A, N, N, I, V, E, R, S, A, I, R, E. Il y a donc 12 jetons, également probables.

b) Le mot contient 2 A, 2 N et 2 R : pour chacune de ces lettres,

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

c) Les voyelles sont A, I, E, A, I, E, soit 6 jetons : $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Il y a autant de consonnes (N, N, V, R, S, R). Les lettres V et S n’apparaissent qu’une fois : la probabilité de tirer un V n’est que de $\frac{1}{12}$.

Réponse. a) 12 · b) $\frac{1}{6}$ pour chacune · c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 6 – Une loterie

Les 250 billets ont tous la même chance d’être tirés.

a) Un seul billet gagne le gros lot : $P = \frac{1}{250} = 0{,}004$, soit 0,4 %.

b) Il y a $1 + 9 + 40 = 50$ billets gagnants :

$$P(\text{gagner}) = \frac{50}{250} = \frac{1}{5} = 20\,\%$$

Un billet sur cinq est gagnant.

c) « Ne rien gagner » est l’événement contraire : $P = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, soit 80 %. On le vérifie avec les 200 billets perdants : $\frac{200}{250} = \frac{4}{5}$.

Réponse. a) $\frac{1}{250}$ · b) $\frac{1}{5}$ · c) $\frac{4}{5}$.

Correction de l’exercice 7 – Une classe au hasard

On choisit un élève au hasard parmi 28 : les 28 issues sont équiprobables.

a) Il y a 16 filles : $P = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$.

b) Il y a $6 + 9 = 15$ demi-pensionnaires : $P = \frac{15}{28}$.

c) Il y a 6 filles demi-pensionnaires :

$$P = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

Remarque : parmi les garçons, 9 sur 12 sont demi-pensionnaires (75 %), contre 6 sur 16 chez les filles (37,5 %) : les garçons le sont plus souvent.

Réponse. a) $\frac{4}{7}$ · b) $\frac{15}{28}$ · c) $\frac{3}{14}$.

Correction de l’exercice 8 – Composer une urne

a) La probabilité de tirer une rouge est le nombre r de boules rouges divisé par 20. On veut $\frac{r}{20} = 0{,}35$, donc

$$r = 0{,}35 \times 20 = 7$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Il faut 7 boules rouges et 13 noires (la probabilité du noir vaut alors 0,65).

b) Il faudrait $\frac{r}{20} = \frac{1}{3}$, soit $r = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$, qui n'est pas un nombre entier : c'est **impossible** avec 20 boules. Il faudrait un nombre total de boules multiple de 3, par exemple 21 boules dont 7 rouges, ou 18 dont 6 rouges.

Réponse. a) 7 boules rouges · b) impossible avec 20 boules, il faut un multiple de 3.

Correction de l'exercice 9 – Un dé à vingt faces

Le dé est équilibré : chacune des 20 faces a une probabilité de $\frac{1}{20}$.

a) Les multiples de 5 sont 5, 10, 15 et 20 : $P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

b) Les nombres premiers jusqu'à 20 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19 (et non 1, qui n'est pas premier) :

$$P = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

c) Les nombres à deux chiffres sont ceux de 10 à 20, au nombre de 11 : $P = \frac{11}{20} = 0{,}55$.

Les nombres à un chiffre (1 à 9) ont donc une probabilité de 0,45.

Réponse. a) $\frac{1}{5}$ · b) $\frac{2}{5}$ · c) $\frac{11}{20}$.

Correction de l'exercice 10 – Fréquence et probabilité

a) La fréquence observée est le nombre de fois où la punaise tombe sur la pointe, divisé par le nombre de lancers :

$$f = \frac{620}{1000} = 0{,}62 = 62\,\%$$

b) **Non** : la formule « issues favorables sur issues possibles » suppose que les issues soient équiprobables. Une punaise n'est pas symétrique : rien n'indique que « pointe » et « côté » aient la même chance, et l'expérience montre d'ailleurs 0,62, loin de $\frac{1}{2}$.

c) Sur un grand nombre de lancers, la fréquence se rapproche de la probabilité : on peut estimer la probabilité de tomber sur la pointe à environ 0,62, et celle de tomber sur le côté à environ 0,38. Sur 5000 lancers, on s'attendrait à environ 3100 chutes sur la pointe.

Réponse. a) 0,62 · b) non, la punaise n'est pas équilibrée · c) la probabilité vaut environ 0,62.

Correction de l'exercice 11 – Événement impossible ou certain

Les 8 boules sont également probables.

a) Tous les numéros, de 1 à 8, sont inférieurs à 10 : l'événement est **certain**, $P = 1$.

b) Aucun numéro n'est négatif : l'événement est **impossible**, $P = 0$.

c) Les nombres premiers jusqu'à 8 sont 2, 3, 5 et 7 :

$$P = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

d) Une seule boule porte le 8 : $P = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

Toute probabilité est comprise entre 0 (événement impossible) et 1 (événement certain).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) certain, $P = 1$ · b) impossible, $P = 0$ · c) $\frac{1}{2}$ · d) $\frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 12 – Une roue à secteurs

Sur une roue, la probabilité d'une couleur est proportionnelle à l'angle total de ses secteurs. On calcule ces angles :

$$\text{rouge} : 4 \times 30 = 120° \qquad \text{bleu} : 2 \times 60 = 120° \qquad \text{vert} : 360 - 240 = 120°$$

Les trois couleurs occupent chacune 120°, soit un tiers du disque :
$P(\text{rouge}) = P(\text{bleu}) = P(\text{vert}) = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.

Erreur à éviter : compter les secteurs et répondre $\frac{4}{7}$ pour le rouge. Les 7 secteurs n'ont pas la même taille, donc ils ne sont pas équiprobables : ce qui compte, c'est l'angle.

Réponse. $\frac{1}{3}$ pour chaque couleur (les angles totaux sont égaux).

Correction de l'exercice 13 – Deux dés et une somme

a) Chaque dé a 6 issues : on obtient $6 \times 6 = 36$ couples (premier dé, second dé), tous équiprobables.

b) Les couples de somme 7 sont $(1\,;6)$, $(2\,;5)$, $(3\,;4)$, $(4\,;3)$, $(5\,;2)$ et $(6\,;1)$:

$$P(\text{somme } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

c) Seul le couple $(6\,;6)$ donne 12 : $P = \frac{1}{36}$.

Les 11 sommes possibles (de 2 à 12) ne sont donc **pas** équiprobables : 7 est six fois plus probable que 12. Pour calculer leur probabilité, il faut compter les couples, pas les sommes.

Réponse. a) 36 · b) $\frac{1}{6}$ · c) $\frac{1}{36}$.

Correction de l'exercice 14 – Un dé pipé

a) La somme des probabilités des 6 faces vaut 1. La face 6 a une probabilité de $\frac{1}{3}$; il reste $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ à partager également entre les 5 autres faces :

$$\frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{15}$$

b) Les faces paires sont 2, 4 et 6 :

$P(\text{pair}) = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6$ (on a écrit $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$).

Avec un dé équilibré, on aurait 0,5 : le truquage favorise les nombres pairs.

Réponse. a) $\frac{2}{15}$ chacune · b) $\frac{3}{5}$.

Correction de l'exercice 15 – Retrouver un effectif

a) Tirer une verte est l'événement contraire de tirer une rouge :

$$P(\text{verte}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

b) Les 15 boules vertes représentent les $\frac{5}{8}$ du total N : $\frac{15}{N} = \frac{5}{8}$. Le produit en croix donne $5N = 120$, donc $N = 24$ boules, dont $24 - 15 = 9$ rouges.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$. On peut aussi raisonner en parts : 8 parts, dont 5 vertes ; 15 boules pour 5 parts font 3 boules par part, donc 24 boules en tout.

Réponse. a) $\frac{5}{8}$ · b) 24 boules au total, dont 9 rouges.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : une tombola scolaire

a) Il y a $2 + 18 + 60 = 80$ billets gagnants, donc $300 - 80 = 220$ perdants.

b) Les 300 billets sont équiprobables : $P(\text{concert}) = \frac{2}{300} = \frac{1}{150}$, $P(\text{livre}) = \frac{18}{300} = \frac{3}{50}$, $P(\text{bonbons}) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5}$.

c) $P(\text{gagner}) = \frac{80}{300} = \frac{4}{15} \approx 0{,}27$.

d) **Non**. Avec 5 billets, la probabilité de gagner augmente, mais elle ne peut pas être multipliée par 5 :

$$5 \times \frac{4}{15} = \frac{4}{3} > 1$$

ce qui est impossible pour une probabilité. Les 5 billets peuvent d’ailleurs gagner plusieurs fois, ce qui empêche d’additionner les probabilités.

Réponse. a) 220 · b) $\frac{1}{150}$, $\frac{3}{50}$ et $\frac{1}{5}$ · c) $\frac{4}{15}$ · d) non, une probabilité ne dépasse jamais 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).