Plaquette 4 – Deux épreuves : arbres et tableaux

Probabilités — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux règles de l'arbre.

Situation	Opération
suivre un chemin (première puis seconde épreuve)	on **multiplie** les probabilités
plusieurs chemins réalisent l'événement	on **additionne** les probabilités des chemins
somme des branches partant d'un même nœud	elle vaut toujours 1

Nombre d'issues. Si la première épreuve a m issues et la seconde n, l'ensemble en a $m \times n$.

Exemple. Une urne contient 2 boules rouges et 1 verte ; on tire deux boules avec remise. Le chemin « rouge puis rouge » a pour probabilité

$$P(R \text{ puis } R) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Tableau à double entrée. Pratique quand les deux épreuves sont de même nature (deux dés, deux tirages) : une ligne par issue de la première, une colonne par issue de la seconde.

Avec ou sans remise.

Type de tirage	Seconde épreuve
avec remise	la composition est **inchangée**
sans remise	il y a une boule de moins, et une de moins dans sa couleur

Épreuves indépendantes. Deux lancers, deux tirages avec remise, deux roues : le résultat de la première ne change rien à la seconde. On multiplie alors directement les probabilités.

Contrôle systématique. La somme des probabilités de tous les chemins de l'arbre vaut 1. Si ce n'est pas le cas, une branche a été oubliée ou mal pondérée.

Trois épreuves. Le principe ne change pas : on multiplie le long du chemin, on additionne les chemins favorables. L'arbre a simplement un étage de plus.

Correction de l'exercice 1 – Deux lancers de pièce

a) L'arbre a deux niveaux. Au premier lancer, deux branches (P et F) ; sous chacune, deux branches pour le second lancer. On obtient 4 chemins : PP, PF, FP et FF.

b) Chaque branche porte la probabilité $\frac{1}{2}$. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Les quatre chemins sont équiprobables.

c) « Exactement un pile » correspond à deux chemins, PF et FP : $P = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. C'est le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

résultat le plus probable, alors que deux piles et zéro pile ont chacun une probabilité de $\frac{1}{4}$.

Réponse. a) PP, PF, FP, FF · b) $\frac{1}{4}$ chacun · c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2 – Deux tirages avec remise

L'urne contient 3 boules : $P(\text{rouge}) = \frac{2}{3}$ et $P(\text{verte}) = \frac{1}{3}$, aux deux tirages puisqu'on remet la boule.

a) Deux rouges : $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

b) Deux vertes : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

c) Une de chaque couleur : deux chemins, rouge puis verte et verte puis rouge, chacun de probabilité $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$:

$$P = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

Contrôle : $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1$. Oublier un des deux chemins mixtes donnerait $\frac{2}{9}$.

Réponse. a) $\frac{4}{9}$ · b) $\frac{1}{9}$ · c) $\frac{4}{9}$.

Correction de l'exercice 3 – Deux tirages sans remise

Sans remise, la composition de l'urne change après le premier tirage : il ne reste que 2 boules.

a) Première boule rouge : $\frac{2}{3}$. Il reste alors 1 rouge et 1 verte, donc seconde boule rouge : $\frac{1}{2}$.

$$P(\text{deux rouges}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

b) Il n'y a qu'une boule verte : on ne peut pas en tirer deux, $P = 0$.

c) Les trois cas (deux rouges, deux vertes, une de chaque) se partagent toutes les issues : $P = 1 - \frac{1}{3} - 0 = \frac{2}{3}$. Avec remise, on avait $\frac{4}{9} \approx 0{,}44$: sans remise, obtenir deux couleurs différentes est plus probable, car on ne peut pas retirer la même boule.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ · b) 0 · c) $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 4 – Un tableau pour deux dés

a) Chaque dé a 6 issues : $6 \times 6 = 36$ couples équiprobables.

b) La somme vaut au moins $1 + 1 = 2$ et au plus $6 + 6 = 12$: toutes les sommes de 2 à 12 sont possibles, mais elles ne sont pas équiprobables.

c) On compte les couples donnant 10, 11 ou 12 : $(4\,;6)$, $(5\,;5)$, $(6\,;4)$, $(5\,;6)$, $(6\,;5)$ et $(6\,;6)$, soit 6 couples.

$$P(\text{somme} \geq 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

La somme 7, obtenue par 6 couples à elle seule, a la même probabilité : c'est la somme la plus probable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) 36 · b) de 2 à 12 · c) $\frac{1}{6}$.

Correction de l’exercice 5 – Un arbre pondéré

a) Au second niveau, on lit les compositions des urnes. Dans A (5 boules) : blanche $\frac{3}{5} = 0{,}6$, noire 0,4. Dans B (5 boules) : blanche $\frac{1}{5} = 0{,}2$, noire 0,8.

b) Deux chemins mènent à une boule blanche. On multiplie les probabilités le long de chaque chemin, puis on additionne :

$$0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}24 + 0{,}12 = 0{,}36$$

La probabilité d’obtenir une boule blanche vaut 0,36 ; celle d’une noire vaut donc 0,64 (on la retrouve avec $0{,}4 \times 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}16 + 0{,}48$).

Réponse. a) 0,6 et 0,4 pour A ; 0,2 et 0,8 pour B · b) 0,36.

Correction de l’exercice 6 – Une urne et un dé

a) Le tirage a 4 issues et le dé 6 : l’expérience complète a $4 \times 6 = 24$ issues équiprobables.

b) Le tirage n’influence pas le dé : on multiplie les probabilités. $P(\text{rouge}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $P(6) = \frac{1}{6}$, donc

$$P(\text{rouge et } 6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

On le retrouve en comptant : 2 issues favorables (une par boule rouge) sur 24.

c) $P(\text{bleue}) = \frac{1}{2}$ et $P(\text{pair}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, donc $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, soit 6 issues sur 24.

Réponse. a) 24 · b) $\frac{1}{12}$ · c) $\frac{1}{4}$.

Correction de l’exercice 7 – Deux roues

a) La roue A a 3 issues équiprobables, la roue B en a 4 : on obtient $3 \times 4 = 12$ couples, chacun de probabilité $\frac{1}{12}$.

b) Les deux roues sont indépendantes : on multiplie les probabilités,

$$P(2 \text{ et Y}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

c) Les nombres impairs de A sont 1 et 3 ($P = \frac{2}{3}$) ; parmi X, Y, Z, T, seule T est dans la première moitié de l’alphabet ($P = \frac{1}{4}$). Donc $P = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$. En comptant les couples : (1 ; T) et (3 ; T), soit $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Réponse. a) 12 · b) $\frac{1}{12}$ · c) $\frac{1}{6}$.

Correction de l’exercice 8 – Avec ou sans remise

L’urne contient 6 boules, dont 4 rouges : au premier tirage, $P(\text{rouge}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

a) Avec remise, la composition ne change pas :

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Sans remise, après une rouge il reste 3 rouges sur 5 boules : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

c) La probabilité est plus élevée **avec remise** : sans remise, il reste moins de boules rouges pour le second tirage. Pour la même raison, obtenir une boule de chaque couleur est plus probable sans remise ($\frac{8}{15}$) qu'avec remise ($\frac{4}{9}$).

Réponse. a) $\frac{4}{9}$ · b) $\frac{2}{5}$ · c) avec remise donne une probabilité plus élevée.

Correction de l'exercice 9 – Trois lancers

Pour cette pièce, $P(\text{pile}) = 0{,}6$ et $P(\text{face}) = 0{,}4$, et les lancers sont indépendants : on multiplie les probabilités le long d'un chemin de l'arbre.

a) Trois piles : $0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}216$.

b) Aucun pile, c'est-à-dire trois faces : $0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}064$.

c) « Au moins un pile » est le contraire de « aucun pile » :

$$P = 1 - 0{,}064 = 0{,}936$$

Avec une pièce équilibrée, on aurait $1 - \frac{1}{8} = 0{,}875$: le truquage en faveur de pile augmente cette probabilité.

Réponse. a) 0,216 · b) 0,064 · c) 0,936.

Correction de l'exercice 10 – Le produit de deux dés

Les 36 couples de résultats sont équiprobables.

a) Un produit est impair seulement si les **deux** facteurs sont impairs. Chaque dé a 3 faces impaires (1, 3, 5) : il y a $3 \times 3 = 9$ couples favorables,

$$P(\text{impair}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

b) « Produit pair » est le contraire : $P = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Un seul facteur pair suffit à rendre le produit pair.

c) Un produit est nul seulement si un facteur est nul ; or aucune face ne porte 0. L'événement est impossible : $P = 0$. Le plus petit produit possible est $1 \times 1 = 1$.

Réponse. a) $\frac{1}{4}$ · b) $\frac{3}{4}$ · c) 0.

Correction de l'exercice 11 – Un code à deux chiffres

a) Le premier chiffre peut prendre 10 valeurs, le second aussi : il y a $10 \times 10 = 100$ codes possibles, de 00 à 99.

b) Un seul code est le bon :

$$P = \frac{1}{100} = 1\,\%$$

c) Les codes à deux chiffres identiques sont 00, 11, 22, …, 99, soit 10 codes : $P = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$. Les deux chiffres sont donc différents avec une probabilité de $\frac{9}{10}$. Avec un code à trois chiffres, il y aurait 1000 codes : chaque chiffre ajouté divise par 10 la probabilité de deviner le code.

Réponse. a) 100 · b) $\frac{1}{100}$ · c) $\frac{1}{10}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Composer un menu

a) Pour composer un menu, on choisit une entrée (3 choix), un plat (4 choix) et un dessert (2 choix) :

$$3 \times 4 \times 2 = 24 \text{ menus}$$

b) Chaque entrée apparaît dans le même nombre de menus, $4 \times 2 = 8$: $P = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$.

c) Une entrée et un dessert donnés figurent dans 4 menus (un par plat) : $P = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$. On retrouve ce résultat en multipliant $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}$, car le choix du dessert ne dépend pas de celui de l’entrée.

Réponse. a) 24 · b) $\dfrac{1}{3}$ · c) $\dfrac{1}{6}$.

Correction de l’exercice 13 – Deux feux tricolores

Chaque feu est vert avec la probabilité 0,4, et ne l’est pas avec la probabilité 0,6 ; les deux feux sont indépendants.

a) Deux feux verts : $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.

b) Aucun feu vert : $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.

c) « Au moins un vert » est le contraire de « aucun vert » :

$$P = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$$

On en déduit qu’exactement un feu est vert avec la probabilité $0{,}64 - 0{,}16 = 0{,}48$ (deux chemins de $0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$).

Réponse. a) 0,16 · b) 0,36 · c) 0,64.

Correction de l’exercice 14 – Tirer deux cartes

Le jeu de 32 cartes compte 4 couleurs de 8 cartes, dont 4 as. Sans remise, la composition change après le premier tirage : il reste 31 cartes.

a) Premier cœur : $\dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$; il reste alors 7 cœurs sur 31 cartes.

$$P(\text{deux cœurs}) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{31} = \frac{7}{124} \approx 0{,}056$$

b) Premier as : $\dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$; il reste 3 as sur 31 cartes. $P(\text{deux as}) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{3}{31} = \dfrac{3}{248} \approx 0{,}012$.

Deux cœurs sont environ 4,7 fois plus probables que deux as, car il y a deux fois plus de cœurs que d’as et l’écart s’accentue au second tirage.

Réponse. a) $\dfrac{7}{124} \approx 0{,}056$ · b) $\dfrac{3}{248} \approx 0{,}012$.

Correction de l’exercice 15 – Un arbre à compléter

a) Au premier niveau, $P(B) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$. Au second niveau, les branches issues d’un même nœud totalisent 1 : après A, S a la probabilité 0,8 et « non S » 0,2 ; après B, S et « non S » ont chacun la probabilité 0,5.

b) Deux chemins mènent à S. On multiplie le long de chaque chemin, puis on additionne :

$$P(S) = 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}65 \times 0{,}5 = 0{,}28 + 0{,}325 = 0{,}605$$

Contrôle : $P(\text{non } S) = 0{,}35 \times 0{,}2 + 0{,}65 \times 0{,}5 = 0{,}07 + 0{,}325 = 0{,}395$, et $0{,}605 + 0{,}395 = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $P(B) = 0{,}65$; branches 0,8/0,2 et 0,5/0,5 · b) $P(S) = 0{,}605$.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : un jeu à deux étapes

a) Le dé donne 6 avec la probabilité $\frac{1}{6}$, et autre chose avec la probabilité $\frac{5}{6}$.

b) Deux chemins mènent à la victoire : 6 puis boule gagnante de l’urne A, ou « pas 6 » puis boule gagnante de l’urne B.

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = \frac{1}{24} + \frac{2}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

c) Sur 600 parties, on peut s’attendre à environ $\frac{1}{8} \times 600 = 75$ parties gagnantes : environ 25 par l’urne A et 50 par l’urne B. L’urne B est moins généreuse, mais elle sert bien plus souvent.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$ · b) $\frac{1}{8}$ · c) environ 75 parties gagnantes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).