Plaquette 3 – Événement contraire, réunion et « au moins un »

Probabilités — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Événement contraire. L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est réalisé exactement quand A ne l'est pas.

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

Événement	Son contraire
« obtenir un 6 »	« ne pas obtenir de 6 »
« au moins un pile »	« aucun pile »
« au moins un défaut »	« aucun défaut »
« plus de 10 »	« au plus 10 »

Le réflexe « au moins un ». Compter directement « au moins un » oblige à distinguer un, deux, trois cas… Son contraire, « aucun », est un cas unique.

$$P(\text{au moins un}) = 1 - P(\text{aucun})$$

Événements incompatibles. Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire en même temps. Dans ce cas :

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

Quand ils ne sont pas incompatibles, on retranche ce qui est compté deux fois :

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ et } B)$$

Vocabulaire	Traduction
« ou »	réunion, au moins l'un des deux
« et »	intersection, les deux à la fois
« ni … ni … »	contraire du « ou »

Attention aux bornes. Une probabilité reste entre 0 et 1. Une somme qui dépasse 1 signale une addition abusive : les événements n'étaient pas incompatibles.

Correction de l'exercice 1 – Le contraire d'un événement

Un événement et son contraire ont des probabilités de somme 1 :

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

a) $1 - 0{,}42 = 0{,}58$.

b) $1 - \frac{3}{7} = \frac{7-3}{7} = \frac{4}{7}$.

c) $1 - 1 = 0$: le contraire d'un événement certain est impossible.

d) $1 - 0{,}05 = 0{,}95$: un événement rare a un contraire presque certain.

Réponse. a) 0,58 · b) $\frac{4}{7}$ · c) 0 · d) 0,95.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Ne pas obtenir un six

a) Une seule face sur 6 porte le 6 : $P = \frac{1}{6}$.

b) **Par dénombrement** : les issues 1, 2, 3, 4, 5 sont favorables, soit 5 issues sur 6 : $P = \frac{5}{6}$.

Par l’événement contraire : « ne pas obtenir de 6 » est le contraire de « obtenir un 6 », donc

$$P = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$$

La seconde méthode ne demande qu’un calcul : elle devient très utile quand les issues favorables sont nombreuses.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ · b) $\frac{5}{6}$.

Correction de l’exercice 3 – Au moins un pile

a) Chaque lancer donne pile (P) ou face (F) : les issues sont PP, PF, FP et FF. Il y en a 4, toutes équiprobables (probabilité $\frac{1}{4}$ chacune).

b) **Par dénombrement** : « au moins un pile » est réalisé par PP, PF et FP, soit 3 issues sur 4 : $P = \frac{3}{4}$.

Par l’événement contraire : le contraire de « au moins un pile » est « aucun pile », c’est-à-dire FF, de probabilité $\frac{1}{4}$. Donc

$$P(\text{au moins un pile}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Attention : « au moins un » n’est pas « exactement un ». Exactement un pile (PF ou FP) a une probabilité de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Réponse. a) PP, PF, FP, FF · b) $\frac{3}{4}$.

Correction de l’exercice 4 – Événements incompatibles

a) Une carte n’a qu’une couleur : elle ne peut pas être à la fois un cœur et un pique. Les deux événements ne peuvent pas se réaliser ensemble : ils sont **incompatibles**.

b) On compte les cartes favorables : 13 cœurs et 13 piques, sans carte commune, soit 26 cartes :

$$P = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

c) Cette fois, le roi de cœur est à la fois un roi et un cœur : les événements ne sont pas incompatibles. En comptant 4 rois et 13 cœurs, on compterait le roi de cœur deux fois ; il y a en réalité $4 + 13 - 1 = 16$ cartes favorables, d’où $P = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$. Additionner sans retirer la carte commune donnerait $\frac{17}{52}$, une carte de trop.

Réponse. a) oui · b) $\frac{1}{2}$ · c) $\frac{4}{13}$ (les événements ne sont pas incompatibles).

Correction de l’exercice 5 – Au moins un six sur deux lancers

a) Chaque lancer a 6 issues : on obtient $6 \times 6 = 36$ couples équiprobables.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Pour n'avoir aucun 6, chaque dé doit donner un nombre de 1 à 5 : il y a $5 \times 5 = 25$ couples favorables, d'où $P = \frac{25}{36}$.

c) « Au moins un 6 » est le contraire de « aucun 6 » :

$$P = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

Erreur classique : additionner $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12}{36}$, ce qui compte deux fois le double 6. On trouve bien $\frac{12}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$, un peu moins d'une chance sur trois.

Réponse. a) 36 · b) $\frac{25}{36}$ · c) $\frac{11}{36}$.

Correction de l'exercice 6 – Un tableau de sondage

On vérifie d'abord les totaux du tableau ($54 + 36 = 90$, $66 + 44 = 110$, $90 + 110 = 200$). La personne est choisie au hasard parmi 200 : chaque probabilité est un effectif divisé par 200.

a) 110 femmes : $P = \frac{110}{200} = 0{,}55$.

b) 120 personnes « pour » : $P = 0{,}6$.

c) 66 femmes « pour » : $P = \frac{66}{200} = 0{,}33$.

d) On compte les femmes (110) et les hommes « pour » (54), sans compter deux fois les femmes « pour » :

$$P = \frac{110 + 54}{200} = \frac{164}{200} = 0{,}82$$

Additionner $0{,}55 + 0{,}6 = 1{,}15$ serait absurde : une probabilité ne dépasse jamais 1.

Réponse. a) 0,55 · b) 0,6 · c) 0,33 · d) 0,82.

Correction de l'exercice 7 – Ni l'un ni l'autre

a) Les élèves qui font les deux langues sont comptés à la fois parmi les 60 % et parmi les 45 % : il faut les retirer une fois.

$$60\,\% + 45\,\% - 20\,\% = 85\,\%$$

85 % des élèves font au moins une des deux langues.

b) Les autres n'en font aucune : $100\,\% - 85\,\% = 15\,\%$.

Erreur classique : additionner 60 et 45, ce qui donnerait 105 %, plus que la classe entière. En détail : anglais seul 40 %, espagnol seul 25 %, les deux 20 %, aucune 15 %, soit 100 %.

Réponse. a) 85 % · b) 15 %.

Correction de l'exercice 8 – Contrôle qualité

a) Une pièce est conforme ou défectueuse : $P(\text{conforme}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

b) Les deux prélèvements étant indépendants, la probabilité que les deux pièces soient conformes est le produit des probabilités (on suit une branche de l'arbre) :

$$0{,}96 \times 0{,}96 = 0{,}9216$$

c) « Au moins une défectueuse » est le contraire de « aucune défectueuse » :
$1 - 0{,}9216 = 0{,}0784$, soit environ 7,8 %.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur classique : additionner 0,04 + 0,04 = 0,08, ce qui compte deux fois le cas où les deux pièces sont défectueuses (0,04 × 0,04 = 0,0016).

Réponse. a) 0,96 · b) 0,9216 · c) 0,0784.

Correction de l'exercice 9 – Plus de la moitié

Le dé a 12 faces équiprobables.

a) « Strictement plus de 6 » : 7, 8, 9, 10, 11, 12, soit 6 issues : $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

b) « Au plus 6 » : 1 à 6 (le 6 compris), soit $P = \frac{1}{2}$.

c) Les deux événements n'ont aucune issue commune, et à eux deux ils couvrent toutes les issues :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ce sont des événements contraires. **Attention au vocabulaire** : « au plus 6 » contient le 6, « plus de 6 » l'exclut ; mettre le 6 dans les deux ferait dépasser 1.

Réponse. a) $\frac{1}{2}$ · b) $\frac{1}{2}$ · c) la somme vaut 1 et ils n'ont aucune issue commune.

Correction de l'exercice 10 – Deux tirages successifs

L'urne contient 5 boules : $P(\text{blanche}) = \frac{3}{5}$ et $P(\text{noire}) = \frac{2}{5}$. Comme on remet la boule, ces probabilités sont les mêmes au second tirage.

a) Deux blanches : on multiplie les probabilités le long de la branche de l'arbre,

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

b) « Au moins une noire » est le contraire de « deux blanches » : $1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Contrôle : deux noires ont une probabilité de $\frac{4}{25}$ et exactement une noire $\frac{12}{25}$; on retrouve $\frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{16}{25}$.

Réponse. a) $\frac{9}{25}$ · b) $\frac{16}{25}$.

Correction de l'exercice 11 – La météo de la semaine

a) Il pleut ou il ne pleut pas : $P(\text{pas de pluie}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

b) En supposant que le temps de mardi ne dépende pas de celui de lundi, on multiplie les probabilités :

$$0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$$

c) « Il pleut au moins un des deux jours » est le contraire de « il ne pleut ni lundi ni mardi » : $1 - 0{,}49 = 0{,}51$, un peu plus d'une chance sur deux.

Erreur classique : additionner 0,3 + 0,3 = 0,6, en comptant deux fois les cas de pluie les deux jours (0,3 × 0,3 = 0,09). Dans la réalité, la météo de deux jours qui se suivent n'est pas indépendante : le modèle reste une approximation.

Réponse. a) 0,7 · b) 0,49 · c) 0,51.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Une probabilité inconnue

a) Une boule n'a qu'une couleur : « rouge » et « verte » ne peuvent pas se produire ensemble, et leurs probabilités s'ajoutent.

$$0{,}45 + P(\text{verte}) = 0{,}7 \quad \text{donc} \quad P(\text{verte}) = 0{,}25$$

b) La somme des probabilités des trois couleurs vaut 1 : $P(\text{bleue}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

c) Sur 60 boules, la proportion de vertes est 0,25 : il y a $0{,}25 \times 60 = 15$ boules vertes (et 27 rouges, 18 bleues). **Contrôle** : $15 + 27 + 18 = 60$.

Réponse. a) 0,25 · b) 0,3 · c) 15 boules vertes.

Correction de l'exercice 13 – Trois lancers de pièce

a) Chaque lancer a 2 issues : on obtient $2 \times 2 \times 2 = 8$ issues équiprobables, PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF.

b) Une seule issue, FFF, donne trois faces : $P = \dfrac{1}{8}$.

c) « Au moins un pile » est le contraire de « aucun pile », c'est-à-dire FFF :

$$P = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Remarque : en comptant les piles, on trouve 1 issue avec 0 pile, 3 avec 1 pile, 3 avec 2 piles et 1 avec 3 piles. On retrouve $3 + 3 + 1 = 7$ issues favorables au c).

Réponse. a) 8 · b) $\dfrac{1}{8}$ · c) $\dfrac{7}{8}$.

Correction de l'exercice 14 – Un abonnement gratuit

a) Les clients qui reçoivent les deux avantages sont comptés deux fois si l'on additionne : on les retire une fois.

$$12\,\% + 30\,\% - 5\,\% = 37\,\%$$

b) Les autres ne reçoivent rien : $100\,\% - 37\,\% = 63\,\%$.

c) Sur 400 clients : $0{,}63 \times 400 = 252$ clients ne reçoivent rien.

Contrôle en effectifs : 48 clients reçoivent un cadeau (12 %), dont 20 ont aussi une réduction ; 120 reçoivent une réduction (30 %). Au moins un avantage :
$48 + 120 - 20 = 148$, et $400 - 148 = 252$.

Réponse. a) 37 % · b) 63 % · c) 252 clients.

Correction de l'exercice 15 – Repérer l'erreur

Les deux premières probabilités sont exactes, mais l'as de cœur est à la fois un as et un cœur : en additionnant, l'élève l'a compté **deux fois**. On compte les cartes favorables sans doublon : 4 as et 13 cœurs, moins l'as de cœur compté deux fois,

$$P = \frac{4 + 13 - 1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

On ne peut additionner directement les probabilités que si les événements n'ont aucune issue commune : par exemple « as ou roi » donne $\dfrac{8}{52} = \dfrac{2}{13}$, car aucune carte n'est à la fois as et roi.

Réponse. L'as de cœur est compté deux fois : la bonne valeur est $\dfrac{16}{52} = \dfrac{4}{13}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : un club sportif

a) Les 25 membres qui pratiquent les deux sports sont comptés dans les 90 et dans les 60 :

$$90 + 60 - 25 = 125 \text{ membres}$$

pratiquent au moins un des deux sports.

b) Il reste $150 - 125 = 25$ membres qui n’en pratiquent aucun.

c) Font uniquement du football : $90 - 25 = 65$ membres, d’où une probabilité de $\frac{65}{150} = \frac{13}{30}$.

d) Font uniquement du basket : $60 - 25 = 35$ membres. Exactement un sport : $65 + 35 = 100$ membres, soit une probabilité de $\frac{100}{150} = \frac{2}{3}$.

Réponse. a) 125 · b) 25 · c) $\frac{13}{30}$ · d) $\frac{2}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).