Plaquette 1 – Issues, événements et expériences à deux épreuves

Probabilités — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions et méthodes du cours.

— Une **issue** est un résultat possible de l'expérience ; un **événement** est un ensemble d'issues.

— Une probabilité est un nombre entre 0 et 1. Elle vaut 0 pour un événement impossible, 1 pour un événement certain.

— Situation d'**équiprobabilité** (dé équilibré, tirage au hasard) :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$$

— La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1.

— Événement **contraire** : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. On l'utilise dès qu'apparaît « au moins un ».

— **Deux épreuves successives** : on représente par un **arbre** ; la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités rencontrées, et la probabilité d'un événement est la **somme** des chemins qui le réalisent.

— Avec deux dés ou deux tirages, on peut aussi dresser un tableau à double entrée.

— Une **fréquence** observée sur un grand nombre d'essais s'approche de la probabilité (loi des grands nombres).

Correction de l'exercice 1 – Dé équilibré

Les six issues sont équiprobables.

a) Une issue favorable : $P = \frac{1}{6}$.

b) Les impairs sont 1, 3, 5 : $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

c) « Plus grand que 2 » : 3, 4, 5, 6, soit 4 issues, donc $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ · b) $\frac{1}{2}$ · c) $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 2 – Tirage dans un sac

— Total de jetons : $4 + 6 + 2 = 12$.

— a) $P(\text{vert}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

— b) On utilise l'événement contraire : $P(\overline{\text{vert}}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. (Contrôle : $4 + 2 = 6$ jetons non verts sur 12.)

— c) Il n'y a aucun jeton bleu : l'événement est **impossible**, sa probabilité vaut 0.

Réponse. a) $\frac{1}{2}$ · b) $\frac{1}{2}$ · c) 0.

Correction de l'exercice 3 – Roue truquée

a) La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $0{,}25 + 0{,}4 + 0{,}15 = 0{,}8$.
— Donc $P(\text{jaune}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

b) « Rouge ou vert » : les deux issues sont incompatibles, on additionne.

— $P = 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}4$, soit 40 % de chances.

Réponse. a) 0,2 · b) 0,4.

Correction de l’exercice 4 – Jeu de 52 cartes

Les 52 cartes ont la même probabilité d’être tirées.

a) Il y a 4 as : $P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

b) Il y a 13 carreaux : $P = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

c) Il y a 3 figures par couleur, soit $3 \times 4 = 12$ figures : $P = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.

Réponse. a) $\frac{1}{13}$ · b) $\frac{1}{4}$ · c) $\frac{3}{13}$.

Correction de l’exercice 5 – Deux lancers de pièce

a) En notant P pour pile et F pour face : **PP, PF, FP, FF**. Ces quatre issues sont équiprobables, chacune de probabilité $\frac{1}{4}$ (produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{2}$ le long d’un chemin de l’arbre).

b) Une seule issue convient (PP) : $P = \frac{1}{4}$.

c) « Exactement une fois pile » correspond à PF et FP, soit deux issues :

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Piège. Il ne faut pas confondre « exactement un pile » ($\frac{1}{2}$) et « au moins un pile » ($1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$).

Réponse. a) PP, PF, FP, FF · b) $\frac{1}{4}$ · c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 6 – Deux tirages avec remise

À chaque tirage, $P(\text{rouge}) = \frac{3}{5}$ et $P(\text{bleue}) = \frac{2}{5}$; la remise fait que les deux tirages sont indépendants.

a) On multiplie le long du chemin « rouge puis rouge » :

$$P(RR) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

b) Deux couleurs différentes : chemin « rouge puis bleue » **ou** « bleue puis rouge ».

— $P(RB) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ et $P(BR) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.
— On additionne les deux chemins : $P = \frac{12}{25}$.
— Contrôle : $P(BB) = \frac{4}{25}$, et $\frac{9}{25} + \frac{12}{25} + \frac{4}{25} = 1$. Cohérent.

Réponse. a) $\frac{9}{25}$ · b) $\frac{12}{25}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 7 – Somme de deux dés

a) Chaque dé a 6 faces, donc il y a $6 \times 6 = 36$ issues équiprobables (on distingue les deux dés).

b) Somme 7 : $(1\,;6)$, $(2\,;5)$, $(3\,;4)$, $(4\,;3)$, $(5\,;2)$, $(6\,;1)$, soit 6 issues.

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

c) Somme ≥ 10 : somme 10 — $(4\,;6)$, $(5\,;5)$, $(6\,;4)$ — somme 11 — $(5\,;6)$, $(6\,;5)$ — et somme 12 — $(6\,;6)$.

— Cela fait $3 + 2 + 1 = 6$ issues, donc $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Réponse. a) 36 · b) $\frac{1}{6}$ · c) $\frac{1}{6}$.

Correction de l’exercice 8 – Tableau à double entrée

L’élève est choisi au hasard parmi 200 : chaque élève a la même probabilité.

— a) $P(\text{cantine}) = \frac{140}{200} = 0{,}7$, soit 70 %.

— b) $P(\text{fille et cantine}) = \frac{62}{200} = 0{,}31$.

— c) $P(\text{garçon et pas cantine}) = \frac{22}{200} = 0{,}11$.

— Contrôle : les quatre cases donnent $0{,}31 + 0{,}19 + 0{,}39 + 0{,}11 = 1$. Cohérent.

Réponse. a) 0,7 · b) 0,31 · c) 0,11.

Correction de l’exercice 9 – Au moins une fois

— Il y a $2 \times 2 \times 2 = 8$ issues équiprobables (PPP, PPF, PFP, …, FFF).

— « Au moins une face » est le contraire de « aucune face », c’est-à-dire de l’unique issue PPP.

$$P(\text{au moins une face}) = 1 - P(\text{PPP}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

— Soit 0,875, c’est-à-dire 87,5 % de chances.

Méthode. Sans l’événement contraire, il faudrait compter les 7 issues favorables une à une : le calcul est bien plus long.

Réponse. $\frac{7}{8} = 0{,}875$.

Correction de l’exercice 10 – Fréquence et probabilité

a) $f = \frac{118}{600} \approx 0{,}197$, soit environ 19,7 %.

b) Pour un dé équilibré, $P(6) = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$, soit 16,7 %.

— L’écart est d’environ 3 points. Il est possible : une fréquence observée n’est jamais exactement égale à la probabilité, elle s’en approche seulement quand le nombre de lancers augmente (loi des grands nombres).

— Avec 600 lancers, l’écart constaté ne suffit pas à affirmer que le dé est truqué, mais il invite à poursuivre l’expérience.

Réponse. a) $f \approx 0{,}197$ · b) proche de $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$: on ne peut pas conclure que le dé est truqué.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Lire un tableau d’effectifs

On choisit au hasard parmi 40 adhérents : chaque probabilité est un effectif divisé par 40.

a) 24 adhérents pratiquent la natation :

$$P(\text{natation}) = \frac{24}{40} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

b) Les moins de 15 ans sont 9 parmi les nageurs et 6 parmi les autres, soit 15 adhérents : $P = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

Contrôle : les non-nageurs sont $40 - 24 = 16$, dont 6 ont moins de 15 ans ; un tableau à double entrée permet de ranger ces quatre groupes sans en oublier.

Réponse. a) $\frac{3}{5}$ · b) $\frac{3}{8}$.

Correction de l’exercice 12 – Deux tirages sans remise

Au premier tirage, il y a 3 rouges sur 5 boules : $P = \frac{3}{5}$. Comme on garde la boule, il ne reste ensuite que 4 boules, dont 2 rouges : le second tirage donne une rouge avec la probabilité $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

On multiplie les probabilités le long du chemin « rouge puis rouge » de l’arbre :

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Avec remise, la probabilité serait $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0{,}36$: sans remise, il reste moins de boules rouges pour le second tirage.

Réponse. $\frac{3}{10} = 0{,}3$.

Correction de l’exercice 13 – Une roue à secteurs inégaux

Les secteurs n’ont pas la même taille : ils ne sont pas équiprobables. La probabilité d’une couleur est la part du disque qu’elle occupe, c’est-à-dire son angle divisé par 360°. Le secteur vert mesure $360 - 180 - 120 = 60°$.

$$P(\text{jaune}) = \frac{180}{360} = \frac{1}{2} \qquad P(\text{rouge}) = \frac{120}{360} = \frac{1}{3} \qquad P(\text{vert}) = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

Contrôle : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = 1$. Répondre $\frac{1}{3}$ pour chaque couleur, parce qu’il y a trois secteurs, serait une erreur.

Réponse. Jaune $\frac{1}{2}$, rouge $\frac{1}{3}$, vert $\frac{1}{6}$.

Correction de l’exercice 14 – Un jeu équitable ?

Léa gagne avec 2 issues sur 6 et Tom avec 4 issues sur 6 :

$$P(\text{Léa}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(\text{Tom}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Tom a deux fois plus de chances de gagner : le jeu n’est **pas** équitable.

Pour le rendre équitable, il faut donner à chacun le même nombre d’issues, par exemple : Léa gagne si le résultat est pair (2, 4 ou 6), Tom s’il est impair. Chacun a alors une probabilité de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ de gagner.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Non ($\frac{1}{3}$ contre $\frac{2}{3}$) ; par exemple pair pour Léa, impair pour Tom.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : un jeu de hasard

— Nombre de jetons non gagnants : $20 - 2 - 6 = 12$.

a) Gagner quelque chose : $2 + 6 = 8$ jetons favorables.

$$P = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

b) $P(\text{gagner 2 €}) = \frac{6}{20} = 0{,}3$.

c) « Rentrer dans ses frais » signifie gagner au moins 2 €, ce qui correspond aux 8 jetons gagnants : la probabilité est 0,4.

— $0{,}4 < 0{,}5$: on a **moins** d’une chance sur deux. Dans 60 % des parties, le joueur perd sa mise.

Réponse. a) 0,4 · b) 0,3 · c) non, $0{,}4 < 0{,}5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).