Plaquette 5 – Problèmes, jeux et interprétation

Probabilités — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Gain moyen. Si un jeu rapporte g_1 avec la probabilité p_1, g_2 avec p_2, etc., le gain moyen par partie vaut

$$g_1p_1 + g_2p_2 + \cdots + g_np_n$$

On y compte la mise comme un gain **négatif**.

Gain moyen	Conclusion
positif	le jeu est favorable au joueur
nul	le jeu est **équitable**
négatif	le jeu est favorable à l'organisateur

Loi des grands nombres. Sur un grand nombre de répétitions, la fréquence observée s'approche de la probabilité, et le gain total s'approche du nombre de parties multiplié par le gain moyen.

Trois erreurs de raisonnement à connaître.

Affirmation	Pourquoi c'est faux
cinq faces de suite, donc pile va sortir	les lancers sont **indépendants**
deux issues, donc une chance sur deux	elles ne sont pas équiprobables
sur 10 lancers, exactement 5 piles	la fréquence **approche** 0,5

Estimer par échantillonnage. Si un échantillon de taille n contient k individus marqués, on estime la proportion de marqués dans la population par $\frac{k}{n}$.

Rédiger une conclusion. On répond dans les termes de l'énoncé, avec un ordre de grandeur, et on signale les limites du modèle quand il y en a.

Correction de l'exercice 1 – Un jeu est-il équitable ?

a) On gagne avec la probabilité $\frac{1}{6}$; le gain net vaut alors $10 - 2 = 8$ €. Sinon (probabilité $\frac{5}{6}$), on perd la mise, 2 €. Le gain moyen par partie vaut

$$8 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{5}{6} = \frac{8 - 10}{6} = -\frac{1}{3} \approx -0{,}33 \text{ €}$$

b) Le gain moyen est négatif : le jeu n'est **pas** équitable, il favorise l'organisateur (environ 100 € de perte pour le joueur sur 300 parties).

c) Il faut un gain moyen nul. En notant g la somme reçue : $(g - 2) \times \frac{1}{6} - 2 \times \frac{5}{6} = 0$, soit $g - 2 - 10 = 0$, donc $g = 12$ €.

Réponse. a) $-\frac{1}{3}$ € · b) non, il favorise l'organisateur · c) 12 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Comparer deux jeux

a) Le gain moyen est le gain multiplié par sa probabilité :

$$\text{A} : 10 \times 0{,}2 = 2 \text{ €} \qquad \text{B} : 4 \times 0{,}5 = 2 \text{ €}$$

b) Les deux jeux rapportent autant en moyenne : sur un grand nombre de parties, ils se valent (sur 100 parties, environ 20 gains de 10 € pour A, 50 gains de 4 € pour B).

c) Le jeu A est le plus risqué : on n’y gagne qu’une fois sur cinq, alors qu’on gagne une fois sur deux au jeu B. Sur quelques parties seulement, on a donc beaucoup plus de chances de repartir sans rien avec A. On choisira A si l’on accepte le risque, B si l’on préfère la régularité.

Réponse. a) 2 € dans les deux cas · b) indifférent sur le long terme · c) le jeu A.

Correction de l’exercice 3 – Le piège du joueur

L’affirmation est **fausse**. Les lancers d’une pièce sont indépendants : la pièce « n’a pas de mémoire », et le résultat d’un lancer ne dépend pas des précédents. Au sixième lancer,

$$P(\text{pile}) = \frac{1}{2}$$

comme à chaque lancer.

Ce qui est vrai : sur un très grand nombre de lancers, la fréquence de pile se rapproche de 0,5. Ce qui est faux : qu’un « rattrapage » soit programmé au coup suivant. Cinq faces de suite sont rares ($\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$), mais pas impossibles. Si la pièce était truquée, une longue série de faces devrait au contraire faire soupçonner qu’elle favorise face.

Réponse. Faux : les lancers sont indépendants, la probabilité de pile reste $\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 4 – Une chance sur deux ?

L’affirmation est **fausse**. Il y a bien deux issues, gagner ou perdre, mais elles ne sont pas **équiprobables** : la formule « issues favorables sur issues possibles » ne s’applique qu’à des issues de même probabilité.

Au loto, il y a énormément de combinaisons possibles et très peu de gagnantes. Déjà, dans une loterie de 1000 billets avec un seul gagnant :

$$P(\text{gagner}) = \frac{1}{1000} \qquad P(\text{perdre}) = \frac{999}{1000}$$

On est très loin de $\frac{1}{2}$. De même, « soit je deviens champion du monde, soit non » ne donne à personne une chance sur deux. Quand les issues ne sont pas équiprobables, il faut connaître leurs probabilités, ou les estimer par des fréquences.

Réponse. Deux issues ne veut pas dire deux issues équiprobables : il faut connaître les probabilités.

Correction de l’exercice 5 – Une assurance

a) Chaque client a un sinistre avec la probabilité 0,03. Sur 1000 clients, on peut s’attendre en moyenne à

$$0{,}03 \times 1000 = 30 \text{ sinistres par an}$$

b) Ces sinistres coûtent en moyenne $30 \times 3000 = 90\,000$ €, soit $90\,000 \div 1000 = 90$ € par client.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Les clients paient $1000 \times 120 = 120\,000$ € : l'assureur gagne en moyenne $120\,000 - 90\,000 = 30\,000$ € par an, soit 30 € par client. Il reste exposé à une mauvaise année (dix sinistres de plus que prévu suffiraient à annuler ce bénéfice), mais avec beaucoup de clients, un tel écart devient peu probable.

Réponse. a) 30 · b) 90 € · c) oui, 30 € de marge par client, soit 30 000 € par an.

Correction de l'exercice 6 – Estimer une population

a) Dans le second échantillon, la proportion de poissons marqués vaut

$$\frac{10}{80} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$$

b) On suppose que cette proportion est la même dans tout l'étang : les 50 poissons marqués représentent 12,5 % de la population N. Donc $0{,}125 \times N = 50$, et $N = \dfrac{50}{0{,}125} = 400$ poissons environ.

c) Ce calcul suppose que les poissons marqués se sont bien mélangés aux autres, que le marquage ne change pas leur comportement, qu'aucun poisson n'est né ou mort entre les deux captures, et que la seconde capture est faite au hasard. L'estimation est fragile : avec un seul poisson marqué de plus ou de moins, elle changerait nettement.

Réponse. a) 12,5 % · b) environ 400 poissons · c) mélange homogène, population stable, tirage au hasard.

Correction de l'exercice 7 – Un contrôle qualité

a) En moyenne, 2 % des 5000 pièces sont défectueuses :

$$0{,}02 \times 5000 = 100 \text{ pièces par jour}$$

b) Contrôler toutes les pièces coûte $5000 \times 0{,}15 = 750$ € par jour. Le contrôle évite de livrer 100 pièces défectueuses, soit $100 \times 9 = 900$ € de coûts évités. Comme $900 > 750$, le contrôle est **rentable** : il fait gagner 150 € par jour.

Il resterait rentable tant que le taux de défauts p vérifie $5000 \times 9 \times p > 750$, c'est-à-dire $p > \dfrac{0{,}15}{9} \approx 1{,}7\,\%$: avec 2 % de défauts, on est au-dessus de ce seuil.

Réponse. a) 100 · b) oui : 900 € évités contre 750 € de coût, soit 150 € de gain par jour.

Correction de l'exercice 8 – Un sondage à interpréter

a) Dans l'échantillon, $0{,}52 \times 500 = 260$ personnes sont favorables, et 240 défavorables : l'écart n'est que de 20 personnes.

b) Le chiffre de 52 % vaut pour l'échantillon ; l'étendre à tous les Français est une **estimation**. Avec 500 personnes interrogées, cette estimation comporte une marge d'incertitude de quelques points (environ 4 points), si bien que la vraie proportion peut se situer entre environ 48 % et 56 %, et donc sous 50 %.

$$\text{le titre est trop affirmatif}$$

Une formulation honnête serait « les avis sont partagés, avec un léger avantage aux favorables ». Il faudrait aussi vérifier que l'échantillon est représentatif.

Réponse. a) 260 · b) trop affirmatif : avec 500 personnes, 50 % reste dans la marge d'incertitude.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 9 – Un jeu de dés à deux étapes

a) Les 36 couples de résultats sont équiprobables ; 6 d’entre eux donnent une somme de 7 : (1 ; 6), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (5 ; 2), (6 ; 1). Donc $P(\text{gagner}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) On gagne 6 € avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et l’on perd 1 € avec la probabilité $\frac{5}{6}$:

$$6 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{5}{6} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17 \text{ €}$$

c) Le gain moyen est positif : le jeu est **favorable au joueur**. Sur 600 parties, il gagnerait environ 100 fois (600 €) et perdrait environ 500 fois (500 €), soit 100 € de bénéfice. Avec un gain de 5 € au lieu de 6, le jeu deviendrait équitable.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ · b) $\frac{1}{6}$ € · c) oui, il est favorable au joueur.

Correction de l’exercice 10 – Tirage au sort équitable

a) Avec deux pièces, les issues PP, PF, FP et FF sont équiprobables (probabilité $\frac{1}{4}$ chacune). Le premier élève est désigné par PP ($\frac{1}{4}$), le deuxième par FF ($\frac{1}{4}$), le troisième par PF ou FP :

$$P(\text{troisième}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

b) Les trois élèves n’ont pas la même chance : le procédé n’est **pas** équitable, le troisième a deux fois plus de chances que les autres. Pour le corriger, on peut lancer un dé : 1 ou 2 pour le premier, 3 ou 4 pour le deuxième, 5 ou 6 pour le troisième, ce qui donne $\frac{1}{3}$ à chacun. Deux pièces se prêtent mal à un partage en trois, car leurs 4 issues ne se partagent pas en trois groupes égaux.

Réponse. a) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ · b) non ; un dé à six faces, deux faces par élève, rétablit l’équité.

Correction de l’exercice 11 – Une loterie et son organisateur

a) La recette vaut $500 \times 3 = 1500$ €. Les lots totalisent $200 + 5 \times 50 + 20 \times 10 = 200 + 250 + 200 = 650$ €.

b) Le bénéfice de l’organisateur est la différence :

$$1500 - 650 = 850 \text{ €}$$

c) En moyenne, un billet rapporte $\frac{650}{500} = 1{,}30$ € de lots ; comme il coûte 3 €, le gain moyen d’un joueur vaut $1{,}30 - 3 = -1{,}70$ € par billet. Seuls 26 billets sur 500 gagnent quelque chose (5,2 %) : le jeu est nettement défavorable au joueur.

Réponse. a) 1500 € et 650 € · b) 850 € · c) −1,70 € par billet.

Correction de l’exercice 12 – Simuler une expérience

a) La fréquence observée vaut

$$f = \frac{31}{50} = 0{,}62 = 62\,\%$$

b) 50 lancers, c’est peu : la fréquence varie beaucoup d’une série de 50 lancers à l’autre. Une autre série pourrait très bien donner 27 ou 35 chutes sur la pointe. L’estimation est **peu fiable** : on ne peut même pas affirmer avec certitude que la pointe est favorisée.

c) Il faut augmenter le nombre de lancers : d’après la loi des grands nombres, la

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

fréquence se stabilise autour de la probabilité quand le nombre d'essais devient grand. Il faut aussi lancer la punaise toujours de la même façon et sur la même surface, car les conditions font partie de l'expérience.

Réponse. a) 0,62 · b) peu fiable sur 50 lancers · c) augmenter le nombre de lancers.

Correction de l'exercice 13 – Deux urnes au choix

a) $P(\text{gagner avec A}) = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$ et $P(\text{gagner avec B}) = \dfrac{7}{20} = 0{,}35$.

b) On compare les probabilités, pas le nombre de boules gagnantes : en écrivant $\dfrac{3}{10} = \dfrac{6}{20}$, on voit que $\dfrac{7}{20} > \dfrac{6}{20}$. Il faut choisir l'urne **B**.

c) Après mélange, il y a $3 + 7 = 10$ boules gagnantes sur $10 + 20 = 30$ boules :

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

Cette probabilité est comprise entre 0,3 et 0,35, plus proche de 0,35 car l'urne B apporte deux fois plus de boules.

Réponse. a) 0,3 et 0,35 · b) l'urne B · c) $\dfrac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 14 – Un test à la loterie

a) C'est seulement une approximation. Additionner les probabilités des 10 billets compterait plusieurs fois les cas où le joueur gagne avec plusieurs billets ; avec 500 billets, ce calcul donnerait même 1, un gain certain, ce qui est faux.

b) Chaque billet perd avec la probabilité $1 - \dfrac{1}{500} = 0{,}998$. En considérant les billets comme indépendants, la probabilité qu'ils perdent tous vaut

$$0{,}998^{10} \approx 0{,}9802$$

c) « Gagner au moins un lot » est le contraire de « tout perdre » : $1 - 0{,}9802 \approx 0{,}0198$, soit environ 1,98 %. L'approximation $\dfrac{10}{500} = 2\,\%$ est ici très bonne, car la probabilité de gagner est faible ; avec 100 billets, elle donnerait 20 % au lieu d'environ 18 %.

Réponse. a) c'est une approximation · b) environ 0,980 · c) environ 0,020.

Correction de l'exercice 15 – Lire une statistique de santé

Le pourcentage cité peut être exact, mais la conclusion ne l'est pas : il manque une comparaison. La plupart des trajets sont courts et se font près du domicile ; il est donc normal que la plupart des accidents s'y produisent, même si ces routes ne sont pas plus dangereuses.

Pour juger du danger, il faudrait comparer le nombre d'accidents au nombre de kilomètres parcourus. Par exemple, si 90 % des kilomètres étaient parcourus près du domicile, on s'attendrait à y trouver 90 % des accidents ; n'en trouver que 80 % montrerait au contraire que

rouler près de chez soi serait alors plus sûr

Même erreur que « la plupart des accidents domestiques ont lieu à la maison » : c'est là qu'on passe le plus de temps. Un pourcentage sans la bonne référence ne prouve rien.

Réponse. Le raisonnement oublie l'exposition : la plupart des trajets sont courts, donc les accidents s'y concentrent naturellement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : la fête de l’école

a) Le dé donne 5 ou 6 avec la probabilité $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, autre chose avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Deux chemins mènent au gain :

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

b) En cas de gain, le joueur reçoit 4 € pour 1 € misé, soit 3 € de gain net ; sinon il perd 1 €. Le gain moyen vaut $3 \times \frac{4}{15} - 1 \times \frac{11}{15} = \frac{12 - 11}{15} = \frac{1}{15} \approx 0{,}07$ € : le jeu est légèrement favorable au **joueur**.

c) Sur 300 parties, le stand encaisse 300 € et verse en moyenne $\frac{4}{15} \times 300 = 80$ lots de 4 €, soit 320 € : il perd environ 20 €. Avec une mise de 1,10 €, le gain moyen du joueur deviendrait légèrement négatif.

Réponse. a) $\frac{4}{15}$ · b) $\frac{1}{15}$ € en faveur du joueur · c) le stand perd environ 20 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).