Plaquette 5 – Comparer et interpréter des séries

Statistiques — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois questions à se poser devant une série.

Question	Indicateur
autour de quelle valeur ?	moyenne, médiane
les valeurs sont-elles resserrées ?	étendue
y a-t-il des valeurs aberrantes ?	comparer moyenne et médiane

Choisir entre moyenne et médiane.

Situation	Indicateur conseillé
série équilibrée, sans valeur extrême	moyenne
présence de valeurs très grandes ou très petites	médiane
on veut connaître un total	moyenne, car $S = N\overline{x}$
on veut décrire l'individu « typique »	médiane

Comparer deux séries. On compare d'abord la position (moyenne ou médiane), puis la dispersion, mesurée par l'étendue :

$$\text{étendue} = \text{valeur maximale} - \text{valeur minimale}$$

Deux séries peuvent avoir la même moyenne et se comporter très différemment.

Interpréter la régularité. Une étendue faible signifie des performances **régulières** ; une étendue forte signale de l'irrégularité, même si la moyenne est bonne.

Critiquer une affirmation. Trois questions à poser :

— sur quelle **population** porte le chiffre ?
— quel **indicateur** a été utilisé ?
— l'**échantillon** est-il représentatif ?

Ce qu'une moyenne ne dit pas. Elle ne dit ni le nombre d'individus au-dessus, ni la dispersion, ni s'il existe des cas extrêmes. « La moitié des élèves sont au-dessus de la moyenne » est **faux** en général : c'est la définition de la médiane.

Correction de l'exercice 1 – Même moyenne, dispersions différentes

a) Série A : somme 50, moyenne 10, étendue $12 - 8 = 4$. Série B : somme 50, moyenne 10, étendue $18 - 2 = 16$.

$$\overline{x}_A = \overline{x}_B = 10 \qquad e_A = 4 \qquad e_B = 16$$

b) Les moyennes sont égales, mais l'étendue de A est quatre fois plus petite : la série **A** est la plus régulière, toutes ses valeurs étant comprises entre 8 et 12. Les deux séries ont même la même médiane (10) : seule la dispersion les distingue, et un indicateur de position ne suffit pas à décrire une série.

Réponse. a) moyenne 10 pour les deux ; étendues 4 et 16 · b) la série A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Deux joueurs de basket

a) Joueur A : $12 + 14 + 10 + 13 + 11 = 60$ points en 5 matchs, moyenne 12. Joueur B : $20 + 2 + 18 + 4 + 16 = 60$ points, moyenne 12 aussi.

b) Les étendues valent

$$14 - 10 = 4 \text{ pour A} \qquad 20 - 2 = 18 \text{ pour B}$$

c) À moyenne égale, l’étendue de A est bien plus faible : ses performances sont prévisibles (au moins 10 points à chaque match), alors que B alterne très bons et très mauvais matchs (deux fois moins de 5 points). Pour la régularité, il faut recruter le joueur **A** ; B reste intéressant si l’on cherche un joueur capable de coups d’éclat.

Réponse. a) 12 points chacun · b) 4 et 18 · c) le joueur A, plus régulier.

Correction de l’exercice 3 – Comparer deux classes

a) Les moyennes sont égales (12,4) : le niveau global est le même. À effectif égal, les deux classes totalisent le même nombre de points ; mais la moyenne ne dit rien de la répartition des notes.

b) Les médianes diffèrent : dans la classe A, la moitié des élèves ont au moins 13, contre 11 seulement dans la classe B.

$$\text{médiane}_A = 13 > \text{médiane}_B = 11$$

L’élève « typique » de A réussit mieux. Dans B, la moyenne dépasse la médiane : quelques très bonnes notes tirent probablement la moyenne vers le haut.

c) L’étendue de B (16) dépasse nettement celle de A (9) : la classe B est plus hétérogène. Même niveau moyen, réalités très différentes.

Réponse. a) même niveau global · b) l’élève typique de A réussit mieux · c) B est plus hétérogène.

Correction de l’exercice 4 – Une moyenne qui progresse

a) Si les trois trimestres ont le même poids, la moyenne annuelle est la moyenne des trois moyennes :

$$\frac{11{,}2 + 12{,}5 + 13{,}8}{3} = \frac{37{,}5}{3} = 12{,}5$$

Elle coïncide avec la moyenne du deuxième trimestre, parce que la progression est régulière (+1,3 point par trimestre).

b) La progression vaut $13{,}8 - 11{,}2 = 2{,}6$ points. En pourcentage de la valeur de départ : $\frac{2{,}6}{11{,}2} \approx 0{,}232$, soit environ +23,2 %. Rien ne garantit cependant que cette progression se poursuive au même rythme.

Réponse. a) 12,5 · b) +2,6 points, soit environ +23,2 %.

Correction de l’exercice 5 – Une affirmation à critiquer

L’affirmation est **fausse** : elle confond la moyenne et la médiane. C’est la médiane qui partage l’effectif en deux moitiés ; la moyenne, elle, équilibre les **valeurs**.

Contre-exemple : la série 10, 10, 10, 10, 10, 10, 18, 18 a pour moyenne

$$\frac{6 \times 10 + 2 \times 18}{8} = \frac{96}{8} = 12$$

et pourtant seuls 2 élèves sur 8 (25 %) ont plus de 12. Sa médiane vaut 10.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'affirmation correcte serait : « la médiane vaut 12, donc la moitié des élèves au moins ont 12 ou plus ».

Réponse. Non : c'est la médiane, pas la moyenne, qui partage l'effectif en deux moitiés.

Correction de l'exercice 6 – Un échantillon douteux

On veut connaître le temps de trajet moyen de **tous** les élèves, mais on n'interroge que les 20 premiers arrivés. Ces élèves ne ressemblent pas à l'ensemble : ce sont probablement ceux qui habitent le plus près (ou les internes, dont le trajet est presque nul), et les élèves en retard sont exclus.

l'échantillon n'est pas représentatif

Le temps moyen sera donc **sous-estimé**. Une meilleure méthode consiste à tirer au sort des élèves dans la liste complète du collège, ou à interroger une classe entière de chaque niveau. La représentativité de l'échantillon compte plus que sa taille : un calcul juste sur un mauvais échantillon donne un résultat faux.

Réponse. L'échantillon n'est pas représentatif : les premiers arrivés habitent près du collège, le temps moyen sera sous-estimé.

Correction de l'exercice 7 – Une correction de barème

a) On raisonne sur la somme des notes : au départ, $25 \times 11{,}6 = 290$ points. Le professeur ajoute $5 \times 2 = 10$ points, d'où une nouvelle somme de 300 :

$$\overline{x} = \frac{300}{25} = 12$$

La moyenne augmente de 0,4 point.

b) **Non**, pas nécessairement. Avec 25 élèves, la médiane est la note de rang 13. Si les 5 élèves concernés sont tous parmi les mieux notés (ou tous parmi les plus faibles et restent en dessous de la médiane), la note de rang 13 ne change pas, et la médiane non plus. Elle peut augmenter si certains de ces élèves sont autour du milieu du classement. La moyenne, elle, change dès qu'une note change.

Réponse. a) 12 · b) non : la moyenne change toujours, la médiane seulement dans certains cas.

Correction de l'exercice 8 – Réunir deux groupes

a) On revient aux sommes de tailles : $20 \times 175 = 3500$ cm pour le groupe A, $30 \times 165 = 4950$ cm pour le groupe B. Pour les 50 personnes :

$$\overline{x} = \frac{3500 + 4950}{50} = \frac{8450}{50} = 169 \text{ cm}$$

b) 169 est à 4 cm de 165 et à 6 cm de 175 : la moyenne est plus proche de 165, parce que le groupe B est plus nombreux. Les écarts sont d'ailleurs dans le rapport inverse des effectifs : $\frac{6}{4} = \frac{30}{20} = 1{,}5$. La moyenne simple des deux moyennes, 170 cm, ne serait juste qu'avec deux groupes de même effectif.

Réponse. a) 169 cm · b) plus proche de 165, car le groupe B est plus nombreux.

Correction de l'exercice 9 – Les écarts de salaire

a) La moyenne (2400 €) dépasse nettement la médiane (1950 €) : quelques salaires très élevés tirent la moyenne vers le haut, alors que la moitié des salariés gagne 1950 € ou moins.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

moyenne > médiane:la répartition est déséquilibrée vers le haut

Plus de la moitié des salariés gagne donc moins que la moyenne.

b) Le directeur confond moyenne et médiane. C'est la médiane qui partage l'effectif en deux : la phrase correcte est « la moitié des salariés gagne plus de 1950 € ». Exemple : avec neuf salariés à 1900 € et un à 6900 €, la moyenne vaut bien 2400 €, mais un seul salarié gagne plus que cette moyenne.

Réponse. a) quelques hauts salaires tirent la moyenne · b) c'est de 1950 € qu'il faut parler (la médiane).

Correction de l'exercice 10 – Changer de barème

a) Ramener les notes sur 20, c'est diviser chaque note par 2. La somme est divisée par 2, donc la moyenne aussi : $27 \div 2 = 13{,}5$. Le maximum et le minimum sont divisés par 2, donc leur différence aussi :

$$\overline{x} = 13{,}5 \qquad e = 18 \div 2 = 9$$

b) **Oui** : diviser toutes les notes par 2 ne change pas leur ordre, donc la note du milieu reste la même, divisée par 2 (une médiane de 28 sur 40 devient 14 sur 20).

Règle générale : multiplier toutes les valeurs par un même nombre multiplie moyenne, médiane et étendue par ce nombre. En revanche, ajouter un même nombre à toutes les valeurs décale moyenne et médiane, mais ne change pas l'étendue.

Réponse. a) moyenne 13,5, étendue 9 · b) oui, la médiane est aussi divisée par 2.

Correction de l'exercice 11 – Lire un diagramme

a) L'effectif total vaut $3 + 5 + 9 + 7 + 4 + 2 = 30$ élèves.

b) La somme des produits « heures × élèves » vaut $0 + 5 + 18 + 21 + 16 + 12 = 72$, d'où une moyenne de $\frac{72}{30} = 2{,}4$ h. Les effectifs cumulés valent 3, 8, 17… : les rangs centraux 15 et 16 tombent dans la colonne « 2 h », donc la médiane vaut 2 h.

c) Le titre est **exact** ($2{,}4 > 2$), mais trompeur : seuls $7 + 4 + 2 = 13$ élèves font plus de 2 h,

$$\frac{13}{30} \approx 43\,\%$$

soit moins de la moitié. Les élèves qui font 6 h tirent la moyenne vers le haut ; un titre plus honnête serait « la plupart des élèves font 2 h de sport ou moins ».

Réponse. a) 30 · b) moyenne 2,4 h, médiane 2 h · c) exact, mais trompeur : moins de la moitié dépasse 2 h.

Correction de l'exercice 12 – Deux méthodes de calcul

a) Le prix moyen d'un article vendu est la recette totale divisée par le nombre d'articles. La recette vaut $40 \times 15 + 10 \times 40 = 600 + 400 = 1000$ € pour 50 articles :

$$\text{prix moyen} = \frac{1000}{50} = 20 \text{ €}$$

b) Le vendeur a calculé $\frac{15 + 40}{2} = 27{,}50$ €, la moyenne des deux **prix**, sans tenir compte des **quantités**. Or les articles à 15 € sont quatre fois plus nombreux (80 % des ventes) : ils doivent peser davantage, $0{,}8 \times 15 + 0{,}2 \times 40 = 20$ €. Avec son chiffre, on surestimerait la recette de 375 €.

Réponse. a) 20 € · b) il a fait la moyenne des prix sans tenir compte des quantités.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Recruter un sprinteur

a) En course, le meilleur temps est le plus **petit** : l’athlète **B** est le plus rapide en moyenne (12,3 s contre 12,5 s).

b) L’étendue de A (0,4 s) est bien plus petite que celle de B (2,1 s) : l’athlète **A** est le plus régulier.

c) Dans un relais, un seul très mauvais temps fait perdre. Les temps de A restent dans un intervalle de 0,4 s, alors que ceux de B peuvent s’écarter de plus de 2 s :

$$0{,}4\ \text{s} < 2{,}1\ \text{s}$$

On choisit donc l’athlète **A**, dont le risque de contre-performance est bien plus faible. Pour tenter un record individuel, on pourrait au contraire préférer B. Le bon indicateur dépend de l’objectif.

Réponse. a) B · b) A · c) A, car le risque de contre-performance est bien plus faible.

Correction de l’exercice 14 – Une moyenne impossible

Pour avoir 14 de moyenne sur 4 devoirs, il faut une somme de $4 \times 14 = 56$ points. Les trois premières notes totalisent $8 + 11 + 13 = 32$: il faudrait

$$56 - 32 = 24$$

au quatrième devoir, ce qui est impossible sur 20. L’affirmation de l’élève est donc fausse.

Avec la meilleure note possible (20), la moyenne vaudrait $\frac{52}{4} = 13$; avec 0, elle vaudrait 8. La moyenne de l’élève est forcément comprise entre 8 et 13. Vérifier la vraisemblance d’un résultat fait partie du calcul.

Réponse. Non : il faudrait un 24 au dernier devoir. Le maximum atteignable est 13.

Correction de l’exercice 15 – Interpréter une évolution

a) Un taux d’évolution est la variation divisée par la valeur de départ.

$$\frac{150 - 120}{120} = 0{,}25 = +25\,\% \qquad \frac{165 - 150}{150} = 0{,}1 = +10\,\%$$

b) Le nombre d’adhérents augmente toujours, mais de moins en moins vite : le taux passe de 25 % à 10 %, et la hausse en nombre de 30 à 15 adhérents. La croissance **ralentit** : l’affirmation du président est fausse. Une formulation honnête serait « une croissance forte, mais qui ralentit » ; sur deux ans, la hausse totale est de $\frac{45}{120} = 37{,}5\,\%$.

Réponse. a) +25 % puis +10 % · b) faux : la croissance ralentit, même si les effectifs montent.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : deux ateliers

a) Atelier A : somme 500, moyenne 100 g ; rangée, la série s’écrit 98, 99, 100, 101, 102, de médiane 100 g et d’étendue 4 g. Atelier B : somme 500, moyenne 100 g ; rangée, 90, 95, 100, 105, 110, de médiane 100 g et d’étendue 20 g.

b) Toutes les pièces de A sont entre 97 et 103 g : 5 conformes sur 5. Pour B, seule la pièce de 100 g est conforme : 1 sur 5, soit

$$20\,\%\ \text{de conformité pour B, contre}\ 100\,\%\ \text{pour A}$$

c) Les deux ateliers ont la même moyenne et la même médiane ; seule la dispersion les distingue, et elle est décisive : il faut retenir l’atelier **A**. En production, la régularité

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

compte autant que la moyenne.

Réponse. a) moyenne et médiane 100 g pour les deux ; étendues 4 et 20 g · b) 5 contre 1 · c) l’atelier A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).