Plaquette 3 – Médiane, étendue et effectifs cumulés

Statistiques — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Médiane. On range d'abord la série dans l'**ordre croissant**.

Effectif N	**Médiane**
impair	la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$
pair	la demi-somme des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$

Propriété. Au moins la moitié des valeurs sont inférieures ou égales à la médiane, et au moins la moitié lui sont supérieures ou égales.

Étendue.

$$e = \text{valeur maximale} - \text{valeur minimale}$$

C'est un indicateur de **dispersion**, pas de position : deux séries de même moyenne peuvent avoir des étendues très différentes.

Effectifs cumulés croissants. On additionne les effectifs de gauche à droite. La médiane est la première valeur dont l'effectif cumulé atteint ou dépasse $\frac{N}{2}$.

Indicateur	**Sensible aux valeurs extrêmes ?**
moyenne	oui, fortement
médiane	non
étendue	oui, elle ne dépend que d'elles

Quand préférer la médiane. Sur des salaires, des prix immobiliers, des temps de trajet : quelques valeurs très grandes tirent la moyenne vers le haut sans représenter la majorité.

Erreur fréquente. Oublier de trier avant de chercher la médiane. Le rang se lit sur la série **ordonnée**, jamais sur la série brute.

Correction de l'exercice 1 – Médiane d'une série impaire

On range d'abord la série dans l'ordre croissant : 3, 5, 7, 9, 12. Il y a 5 valeurs (nombre impair) : la médiane est la valeur du milieu, au rang $\frac{5+1}{2} = 3$.

$$\text{médiane} = 7 \qquad \text{étendue} = 12 - 3 = 9$$

Il y a bien deux valeurs avant 7 et deux après. La moyenne vaut $\frac{36}{5} = 7{,}2$, proche de la médiane.

Si l'on remplaçait 12 par 40, la médiane resterait 7, mais la moyenne passerait à 12,8 et l'étendue à 37 : moyenne et étendue sont sensibles aux valeurs extrêmes, pas la médiane.

Réponse. Médiane 7, étendue 9.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Médiane d’une série paire

On range d’abord la série : 2, 4, 8, 9, 11, 15. Il y a 6 valeurs (nombre pair) : la médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales, aux rangs 3 et 4.

$$\text{médiane} = \frac{8+9}{2} = 8{,}5$$

Trois valeurs sont en dessous, trois au-dessus ; la médiane n’est pas une valeur de la série. L’étendue vaut $15 - 2 = 13$.

Erreur classique : prendre les valeurs centrales de la série non rangée (11 et 15), ce qui donnerait 13. Le tri est la première étape, toujours.

Réponse. Médiane 8,5, étendue 13.

Correction de l’exercice 3 – Médiane et moyenne différentes

a) La somme vaut $2 + 3 + 3 + 4 + 38 = 50$, donc la moyenne vaut $\frac{50}{5} = 10$. La série est déjà rangée et compte 5 valeurs : la médiane est la troisième, 3.

$$\overline{x} = 10 \qquad \text{médiane} = 3$$

b) La moyenne est supérieure à quatre valeurs sur cinq : elle est tirée vers le haut par la valeur extrême 38, qui représente à elle seule 76 % de la somme. La **médiane** décrit mieux la série, dont presque toutes les valeurs sont proches de 3. D’ailleurs, sans le 38, la moyenne vaudrait $\frac{12}{4} = 3$, comme la médiane.

Réponse. a) moyenne 10, médiane 3 · b) la médiane, car 38 est une valeur extrême.

Correction de l’exercice 4 – Médiane dans un tableau d’effectifs

L’effectif total vaut $3 + 5 + 7 + 4 + 2 = 21$ élèves. On calcule les effectifs cumulés croissants en ajoutant chaque effectif aux précédents :

note	8	10	12	14	16
cumul	3	8	15	19	21

L’effectif est impair : la médiane est la valeur de rang $\frac{21+1}{2} = 11$. Les rangs 9 à 15 correspondent à la note 12, car le cumul passe de 8 à 15 dans cette colonne. Donc

$$\text{médiane} = 12$$

Au moins la moitié des élèves ont 12 ou moins, et au moins la moitié ont 12 ou plus.

Réponse. 21 élèves ; cumuls 3, 8, 15, 19, 21 ; médiane 12.

Correction de l’exercice 5 – Effectif pair dans un tableau

L’effectif total vaut $4 + 6 + 8 + 4 + 2 = 24$: il est pair, la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs 12 et 13. On calcule les effectifs cumulés : 4, 10, 18, 22, 24.

Les rangs 11 à 18 correspondent à la valeur 2 (le cumul passe de 10 à 18) : les valeurs de rangs 12 et 13 valent toutes deux 2, donc

$$\text{médiane} = \frac{2+2}{2} = 2 \text{ livres}$$

La moyenne vaut $\frac{0 + 6 + 16 + 12 + 8}{24} = \frac{42}{24} = 1{,}75$ livre, un peu moins que la médiane.

Réponse. Médiane 2 livres.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Étendue et dispersion

a) Série A : $9+10+10+11+10=50$, moyenne 10. Série B : $2+18+10+4+16=50$, moyenne 10 aussi.

b) L’étendue est l’écart entre la plus grande et la plus petite valeur :

$$\text{A} : 11-9=2 \qquad \text{B} : 18-2=16$$

c) La série **B** est bien plus dispersée : ses valeurs s’écartent beaucoup de 10, alors que celles de A en sont toutes proches. Les deux séries ont pourtant la même moyenne, et même la même médiane (10, une fois les séries rangées) : un indicateur de position ne suffit pas à décrire une série, il faut aussi un indicateur de dispersion.

Réponse. a) moyenne 10 pour les deux · b) 2 et 16 · c) la série B.

Correction de l’exercice 7 – Une valeur à retrouver

La série compte 7 valeurs, déjà rangées : la médiane est la valeur de rang $\frac{7+1}{2}=4$, c’est-à-dire x. Comme la médiane vaut 9 :

$$x=9$$

La série 3, 5, 7, 9, 12, 14, 18 est bien rangée dans l’ordre croissant (il fallait $7 \leq x \leq 12$). Son étendue vaut $18-3=15$.

Sa moyenne vaut $\frac{68}{7} \approx 9{,}7$, un peu plus que la médiane : les grandes valeurs sont un peu plus éloignées du centre que les petites.

Réponse. $x=9$, étendue 15.

Correction de l’exercice 8 – Les salaires d’une entreprise

a) La somme des salaires vaut 25 000 €, d’où une moyenne de $\frac{25\,000}{9} \approx 2778$ €. La série est rangée et compte 9 valeurs : la médiane est la cinquième,

$$\text{médiane} = 1900 \text{ €}$$

b) 8 salariés sur 9 gagnent moins que la moyenne : celle-ci est tirée vers le haut par le salaire de 9800 €, qui représente à lui seul 39,2 % de la masse salariale. Le syndicat mettra en avant la **médiane**, qui reflète le salaire de la majorité ; la direction préférera la **moyenne**, plus flatteuse. Sans le salaire extrême, la moyenne vaudrait d’ailleurs 1900 €, comme la médiane : le choix de l’indicateur n’est jamais neutre.

Réponse. a) moyenne environ 2778 €, médiane 1900 € · b) le syndicat la médiane, la direction la moyenne.

Correction de l’exercice 9 – Les tailles d’un groupe

a) On range les tailles : 158, 160, 162, 165, 168, 170, 171, 174. Il y a 8 valeurs (nombre pair) : la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs 4 et 5 :

$$\text{médiane} = \frac{165+168}{2} = 166{,}5 \text{ cm}$$

b) L’étendue vaut $174-158=16$ cm. La somme des tailles vaut 1328, d’où une moyenne de $\frac{1328}{8}=166$ cm.

Moyenne et médiane sont très proches, et quatre personnes sont au-dessus de la moyenne, quatre en dessous : c’est un groupe homogène, dont les tailles tiennent dans 16 cm.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) 166,5 cm · b) étendue 16 cm, moyenne 166 cm.

Correction de l’exercice 10 – Lire des effectifs cumulés

a) Un effectif cumulé est la somme des effectifs jusqu’à la valeur considérée. Pour retrouver chaque effectif, on soustrait le cumul précédent : 6, $14-6=8$, $25-14=11$, $34-25=9$, $40-34=6$.

temps	5	10	15	20	30
effectif	6	8	11	9	6

b) L’effectif total vaut 40, nombre pair : la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs 20 et 21. Les rangs 15 à 25 correspondent à 15 minutes, donc

$$\text{médiane} = 15 \text{ minutes}$$

La moitié des personnes mettent 15 minutes ou moins.

Réponse. a) 6, 8, 11, 9, 6 · b) médiane 15 minutes.

Correction de l’exercice 11 – Ajouter une valeur

a) La série 4, 6, 8, 10 compte 4 valeurs : la médiane est la demi-somme des valeurs centrales, $\frac{6+8}{2}=7$.

b) Avec 20, la série rangée devient 4, 6, 8, 10, 20 : 5 valeurs, la médiane est la troisième, 8. Elle n’augmente que de 1, alors que la moyenne passe de 7 à $\frac{48}{5}=9{,}6$.

c) Avec 2, la série rangée devient 2, 4, 6, 8, 10, 20 : 6 valeurs, et

$$\text{médiane} = \frac{6+8}{2} = 7$$

On retrouve la médiane de départ : on a ajouté une valeur de chaque côté, ce qui laisse le « milieu » inchangé.

Réponse. a) 7 · b) 8 · c) 7.

Correction de l’exercice 12 – Les prix des logements

a) La série est rangée et compte 11 valeurs : la médiane est la valeur de rang $\frac{11+1}{2}=6$, soit 160 milliers d’euros.

b) La somme vaut $545+655+1200=2400$, d’où une moyenne de

$$\frac{2400}{11} \approx 218 \text{ milliers d'euros}$$

c) 10 logements sur 11 valent moins que la moyenne, tirée vers le haut par le bien à 800 milliers d’euros (un tiers du total à lui seul). Une annonce honnête utilisera la **médiane**, qui décrit le logement typique du quartier : sans le bien exceptionnel, la moyenne vaudrait d’ailleurs 160, comme la médiane.

Réponse. a) 160 · b) environ 218 · c) la médiane, plus représentative.

Correction de l’exercice 13 – Comparer deux classes

a) Les deux médianes valent 12 : dans chaque classe, la moitié des élèves au moins ont 12 ou plus. La réussite « typique » est la même.

b) L’étendue de B (16 points) est bien plus grande que celle de A (6 points) : la classe **B** est la plus hétérogène.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Dans la classe A, la note la plus basse est au plus égale à la médiane, 12, et toutes les notes tiennent dans un intervalle de 6 points. La note la plus haute vaut donc au plus

$$12 + 6 = 18$$

Un 19 est impossible en classe A. En classe B, les notes peuvent s'étendre sur 16 points, par exemple de 3 à 19 : un 19 y est possible.

Réponse. a) identique · b) la classe B · c) seulement dans la classe B.

Correction de l'exercice 14 – Les buts d'une saison

a) Le nombre de matchs est l'effectif total : $7 + 9 + 6 + 5 + 3 = 30$.

b) Les effectifs cumulés valent 7, 16, 22, 27, 30. L'effectif est pair : la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs 15 et 16, qui correspondent toutes deux à 1 but (le cumul passe de 7 à 16). Donc la médiane vaut 1 but, et l'étendue $5 - 0 = 5$ buts.

c) La somme des produits « buts × matchs » vaut $0 + 9 + 12 + 15 + 15 = 51$:

$$\overline{x} = \frac{51}{30} = 1{,}7 \text{ but par match}$$

La moyenne dépasse la médiane : les quelques matchs à 5 buts la tirent vers le haut.

Réponse. a) 30 matchs · b) médiane 1, étendue 5 · c) 1,7 but par match.

Correction de l'exercice 15 – Construire une série

On traduit les trois contraintes. La moyenne vaut 10 pour 5 nombres : leur somme doit valoir $5 \times 10 = 50$. La médiane vaut 8 : une fois rangés, le troisième nombre est 8. L'étendue vaut 20 : le plus grand dépasse le plus petit de 20.

On choisit par exemple 4 comme plus petit nombre ; le plus grand vaut alors 24. Avec le 8 du milieu, on a déjà $4 + 8 + 24 = 36$: il reste 14 à répartir entre le deuxième nombre (entre 4 et 8) et le quatrième (entre 8 et 24), par exemple 6 et 8.

$$4 \quad 6 \quad 8 \quad 8 \quad 24$$

Vérification : somme 50, médiane 8, étendue 20. La solution n'est pas unique : 2, 7, 8, 11, 22 convient aussi.

Réponse. Par exemple 4, 6, 8, 8, 24 (la solution n'est pas unique).

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : trois indicateurs

a) L'effectif total vaut $4 + 7 + 9 + 5 + 4 + 1 = 30$ membres ; les effectifs cumulés valent 4, 11, 20, 25, 29, 30.

b) L'effectif est pair : la médiane est la demi-somme des valeurs de rangs 15 et 16, qui valent toutes deux 14 (le cumul passe de 11 à 20). La médiane vaut 14 ans et l'étendue $25 - 12 = 13$ ans.

c) La somme des produits « âge × effectif » vaut $48 + 91 + 126 + 75 + 64 + 25 = 429$:

$$\overline{x} = \frac{429}{30} = 14{,}3 \text{ ans}$$

d) Un seul membre a 25 ans : sans lui, l'étendue passerait de 13 à 4 ans et la moyenne à $\frac{404}{29} \approx 13{,}9$ ans, alors que la médiane resterait 14. La **médiane** décrit le mieux l'âge des membres, surtout des collégiens.

Réponse. a) 30 membres · b) médiane 14 ans, étendue 13 ans · c) 14,3 ans · d) la médiane.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).