Plaquette 2 – Moyenne simple et moyenne pondérée

Statistiques — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Moyenne d'une série brute.

$$\overline{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{\text{nombre de valeurs}}$$

Moyenne pondérée. Quand chaque valeur x_i apparaît n_i fois (ou porte un coefficient n_i) :

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$$

Situation	Rôle de n_i
tableau d'effectifs	nombre d'individus ayant la valeur x_i
notes coefficientées	le coefficient de la matière
données en classes	l'effectif de la classe, x_i étant le centre

Centre d'une classe. Pour la classe $[a\,;b[$, le centre vaut $\frac{a+b}{2}$. La moyenne obtenue est alors **approchée** : on ne connaît pas les valeurs exactes.

Propriétés utiles.

Transformation des valeurs	Effet sur la moyenne
ajouter k à toutes	la moyenne augmente de k
multiplier toutes par k	la moyenne est multipliée par k

Somme totale. De $\overline{x} = \frac{S}{N}$ on tire $S = N\overline{x}$: c'est la clé de tous les problèmes de valeur manquante.

Le piège de la moyenne de moyennes. La moyenne de deux groupes n'est la moyenne des deux moyennes que si les deux groupes ont le **même effectif**. Sinon, il faut pondérer par les effectifs.

Correction de l'exercice 1 – Moyenne d'une série brute

La moyenne est la somme des valeurs divisée par leur nombre. Ici, il y a 5 valeurs, de somme $12 + 15 + 9 + 14 + 10 = 60$:

$$\overline{x} = \frac{60}{5} = 12$$

Contrôle de vraisemblance : la moyenne est comprise entre la plus petite valeur (9) et la plus grande (15). Les écarts à la moyenne valent 0, 3, -3, 2, -2 : leur somme est nulle, comme toujours.

Si l'on ajoutait la valeur 18, la somme passerait à 78 pour 6 valeurs, et la moyenne à 13 : une valeur au-dessus de la moyenne la fait monter.

Réponse. $\overline{x} = 12$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Avec des décimaux

On additionne les quatre valeurs, en regroupant celles qui donnent des nombres ronds : $(4{,}5 + 5{,}8) + (6{,}2 + 3{,}5) = 10{,}3 + 9{,}7 = 20$. On divise par le nombre de valeurs :

$$\overline{x} = \frac{20}{4} = 5$$

Contrôle : la moyenne est comprise entre 3,5 et 6,2. Deux valeurs sont au-dessus (6,2 et 5,8), deux en dessous (4,5 et 3,5), et les écarts se compensent : $-0{,}5 + 1{,}2 + 0{,}8 - 1{,}5 = 0$.

Réponse. $\overline{x} = 5$.

Correction de l’exercice 3 – Notes coefficientées

Pour une moyenne coefficientée, chaque note compte autant de fois que son coefficient : on additionne les produits « note × coefficient », puis on divise par la **somme des coefficients**.

$$\frac{2 \times 12 + 3 \times 15 + 1 \times 8}{2 + 3 + 1} = \frac{24 + 45 + 8}{6} = \frac{77}{6} \approx 12{,}83$$

Sans coefficients, on trouverait $\frac{35}{3} \approx 11{,}67$: la moyenne pondérée est plus haute parce que la meilleure note a le plus fort coefficient.

Erreur classique : diviser par 3 (le nombre de matières) donnerait 25,67, une moyenne impossible sur 20.

Réponse. $\frac{77}{6} \approx 12{,}83$.

Correction de l’exercice 4 – Tableau d’effectifs

L’effectif total est la somme des effectifs : $5 + 8 + 4 + 3 = 20$ élèves.

Chaque valeur compte autant de fois que son effectif : on additionne les produits « valeur × effectif », soit $0 \times 5 + 1 \times 8 + 2 \times 4 + 3 \times 3 = 25$, puis on divise par l’effectif total :

$$\overline{x} = \frac{25}{20} = 1{,}25$$

En moyenne, un élève a 1,25 frère ou sœur. **Erreur classique** : calculer $\frac{0 + 1 + 2 + 3}{4} = 1{,}5$, en oubliant que les valeurs n’ont pas le même effectif.

Réponse. 20 élèves, moyenne 1,25.

Correction de l’exercice 5 – La valeur manquante

Pour avoir 13 de moyenne sur 5 devoirs, il faut que la **somme** des cinq notes vaille

$$5 \times 13 = 65$$

Les quatre premières notes totalisent $11 + 15 + 12 + 14 = 52$. Il faut donc obtenir $65 - 52 = 13$ au cinquième devoir.

Remarque : la moyenne des quatre premières notes vaut déjà $\frac{52}{4} = 13$; ajouter une note égale à la moyenne ne la change pas. Pour atteindre 14, il faudrait $70 - 52 = 18$, et pour 15, 23 : impossible sur 20.

Réponse. Il lui faut 13.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Deux groupes d’effectifs différents

Les deux groupes n’ont pas le même effectif : on ne peut pas faire la moyenne des deux moyennes. On revient aux sommes de notes, en utilisant somme = effectif × moyenne :

$$12 \times 11 = 132 \qquad 18 \times 14 = 252$$

La somme totale vaut $132 + 252 = 384$ pour 30 élèves, d’où une moyenne de $\frac{384}{30} = 12{,}8$.

Erreur classique : $\frac{11 + 14}{2} = 12{,}5$. Le groupe le plus nombreux a la meilleure moyenne, donc la moyenne générale est plus proche de 14. Avec deux groupes de 15 élèves, la moyenne simple serait juste.

Réponse. 12,8 (et non 12,5).

Correction de l’exercice 7 – L’effet d’une valeur extrême

a) La somme vaut $8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 50$, donc la moyenne vaut $\frac{50}{5} = 10$.

b) En remplaçant 12 par 60, la somme augmente de 48 et devient 98 :

$$\overline{x} = \frac{98}{5} = 19{,}6$$

c) Une seule valeur a changé, et la moyenne a presque doublé : elle a augmenté de $\frac{48}{5} = 9{,}6$. La moyenne est **très sensible** aux valeurs extrêmes ; elle est maintenant au-dessus de quatre valeurs sur cinq et ne représente plus bien la série. La médiane, elle, reste égale à 10 : c’est un indicateur plus robuste.

Réponse. a) 10 · b) 19,6 · c) la moyenne est très sensible aux valeurs extrêmes, la médiane non.

Correction de l’exercice 8 – Transformer toutes les valeurs

On raisonne sur la somme des 10 valeurs, qui vaut $10 \times 14 = 140$.

a) Ajouter 3 à chaque valeur ajoute $10 \times 3 = 30$ à la somme : 170, donc une moyenne de 17. La moyenne augmente de 3.

b) Multiplier chaque valeur par 2 multiplie la somme par 2 : 280, donc une moyenne de 28.

c) Après l’ajout, la moyenne vaut 17 ; après la multiplication par 2 :

$$2 \times 17 = 34$$

L’ordre compte : en multipliant d’abord puis en ajoutant 3, on obtiendrait $28 + 3 = 31$, car l’ajout ne serait pas doublé.

Réponse. a) 17 · b) 28 · c) 34.

Correction de l’exercice 9 – Données regroupées en classes

On ne connaît pas les durées exactes, seulement leur classe. On remplace chaque classe par son **centre** (5, 15 et 25 minutes), comme si tous les élèves de la classe avaient cette durée :

$$\frac{8 \times 5 + 12 \times 15 + 10 \times 25}{8 + 12 + 10} = \frac{40 + 180 + 250}{30} = \frac{470}{30} \approx 15{,}7$$

La durée moyenne est d’environ 15,7 minutes. C’est une **estimation**, puisque les durées réelles ne sont pas exactement les centres des classes. Elle est plausible : la classe la plus nombreuse est [10 ; 20[, qui regroupe 40 % des élèves.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Environ 15,7 minutes (estimation par les centres de classes).

Correction de l'exercice 10 – Les températures de la semaine

a) Il y a 7 relevés, de somme $7 + 9 + 12 + 11 + 8 + 6 + 10 = 63$. La température moyenne vaut

$$\frac{63}{7} = 9 \text{ degrés}$$

b) Les températures supérieures à 9 degrés sont 12, 11 et 10 : **trois** jours ont dépassé la moyenne. Trois autres jours sont en dessous (7, 8 et 6) et un jour est exactement à 9.

Remarque : rangée dans l'ordre, la série s'écrit 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ; sa médiane vaut aussi 9. La série étant symétrique autour de 9, moyenne et médiane coïncident.

Réponse. a) 9 degrés · b) 3 jours.

Correction de l'exercice 11 – Atteindre une moyenne

a) La somme des notes est égale à l'effectif multiplié par la moyenne :

$$6 \times 11{,}5 = 69$$

b) Pour avoir 12 de moyenne sur 8 devoirs, il faut une somme de $8 \times 12 = 96$. Il manque $96 - 69 = 27$ points, à répartir sur les deux derniers devoirs : il faut y obtenir en moyenne $\frac{27}{2} = 13{,}5$ (par exemple 13 et 14).

Vérification : $\frac{69 + 27}{8} = 12$. Pour viser 14 de moyenne, il faudrait $112 - 69 = 43$ points sur deux devoirs, plus que 40 : impossible.

Réponse. a) 69 · b) 13,5 de moyenne sur les deux derniers.

Correction de l'exercice 12 – Le brevet

On calcule la moyenne pondérée : somme des produits « note × coefficient », divisée par la somme des coefficients.

$$\frac{100 \times 14 + 100 \times 11 + 100 \times 16}{300} = \frac{4100}{300} \approx 13{,}67$$

Comme les trois coefficients sont égaux, on retrouve la moyenne simple $\frac{41}{3} \approx 13{,}67$.

Avec un coefficient 200 sur l'oral, la somme des produits devient $1400 + 1100 + 3200 = 5700$ et celle des coefficients 400 : la moyenne vaut $\frac{5700}{400} = 14{,}25$. Elle augmente d'environ 0,58 point, car la meilleure note pèse davantage.

Réponse. ≈ 13,67 ; avec l'oral en coefficient 200, la moyenne monte à 14,25.

Correction de l'exercice 13 – Consommation d'essence

a) Sur l'autoroute, 300 km font trois fois 100 km : $3 \times 6{,}5 = 19{,}5$ L. En ville : 8,5 L. La consommation totale vaut $19{,}5 + 8{,}5 = 28$ L.

b) Le trajet fait 400 km, soit quatre fois 100 km :

$$28 \div 4 = 7 \text{ L aux 100 km}$$

c) **Non** : la moyenne simple $\frac{6{,}5 + 8{,}5}{2} = 7{,}5$ supposerait autant de kilomètres de chaque type. L'autoroute représente 75 % du trajet et pèse donc plus lourd : $0{,}75 \times 6{,}5 + 0{,}25 \times 8{,}5 = 7$, on retrouve la réponse b).

Réponse. a) 28 L · b) 7 L aux 100 km · c) non, l'autoroute pèse plus lourd.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Le panier de courses

a) On calcule le montant de chaque lot : $3 \times 4 = 12$ €, $2 \times 9 = 18$ € et $5 \times 2{,}40 = 12$ €. Le total vaut

$$12 + 18 + 12 = 42 \text{ €}$$

b) Le client achète $3 + 2 + 5 = 10$ articles : le prix moyen d’un article est $42 \div 10 = 4{,}20$ €.

Erreur classique : faire la moyenne des trois prix, $\dfrac{4 + 9 + 2{,}4}{3} \approx 5{,}13$ €, en oubliant les quantités. Les cinq articles bon marché tirent le prix moyen vers le bas, mais les deux articles à 9 € représentent quand même près de 43 % de la dépense.

Réponse. a) 42 € · b) 4,20 € par article.

Correction de l’exercice 15 – Retrouver un effectif

La moyenne est la somme des produits « valeur × effectif » divisée par l’effectif total. Avec l’effectif inconnu n :

$$\frac{4 \times 5 + n \times 8}{4 + n} = 7$$

Le produit en croix donne $20 + 8n = 7(4 + n) = 28 + 7n$, d’où $n = 8$.

Vérification : la somme vaut $20 + 64 = 84$ pour 12 valeurs, et $84 \div 12 = 7$. C’est cohérent : la moyenne 7 est deux fois plus près de 8 (écart 1) que de 5 (écart 2), il faut donc deux fois plus de valeurs 8 que de valeurs 5.

Réponse. $n = 8$.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : une classe entière

a) L’effectif total est la somme des effectifs : $2 + 6 + 10 + 5 + 2 = 25$ élèves.

b) On additionne les produits « note × effectif » : $12 + 54 + 120 + 75 + 36 = 297$, puis on divise par 25 :

$$\overline{x} = \frac{297}{25} = 11{,}88$$

c) Ont au moins 10 les élèves notés 12, 15 ou 18 : $10 + 5 + 2 = 17$ élèves sur 25, soit $\dfrac{17}{25} = 68\,\%$.

d) Ajouter 1 point à chacun ajoute 25 points à la somme, donc 1 point à la moyenne : 12,88. Les élèves qui avaient 9 passent à 10 : la proportion d’élèves ayant au moins 10 monte à $\dfrac{23}{25} = 92\,\%$.

Réponse. a) 25 · b) 11,88 · c) 68 % · d) 12,88.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).