

Plaque 2 – Moyenne simple et moyenne pondérée

Statistiques – Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Moyenne d'une série brute.

$$\bar{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{\text{nombre de valeurs}}$$

Moyenne pondérée. Quand chaque valeur x_i apparaît n_i fois (ou porte un coefficient n_i) :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

Situation	Rôle de n_i
tableau d'effectifs	nombre d'individus ayant la valeur x_i
notes coefficientées	le coefficient de la matière
données en classes	l'effectif de la classe, x_i étant le centre

Centre d'une classe. Pour la classe $[a; b]$, le centre vaut $\frac{a+b}{2}$. La moyenne obtenue est alors **approchée** : on ne connaît pas les valeurs exactes.

Propriétés utiles.

Transformation des valeurs	Effet sur la moyenne
ajouter k à toutes	la moyenne augmente de k
multiplier toutes par k	la moyenne est multipliée par k

Somme totale. De $\bar{x} = \frac{S}{N}$ on tire $S = N\bar{x}$: c'est la clé de tous les problèmes de valeur manquante.

Le piège de la moyenne de moyennes. La moyenne de deux groupes n'est la moyenne des deux moyennes que si les deux groupes ont le **même effectif**. Sinon, il faut pondérer par les effectifs.

Correction de l'exercice 1 – Moyenne d'une série brute

- **Nombre de valeurs** : 5 ✓
- **Somme, premier terme** : $12 + 15 = 27$ ✓
- **Suite** : $27 + 9 = 36$ ✓
- **Suite** : $36 + 14 = 50$ ✓
- **Suite** : $50 + 10 = 60$ ✓
- **Somme totale** : 60 ✓
- **Moyenne** : $\frac{60}{5}$ ✓
- **Résultat** :

$$\bar{x} = 12$$

- **Contrôle de vraisemblance** : la moyenne est entre 9 et 15 ✓

- **Écarts à la moyenne** : 0, 3, -3, 2, -2 ✓
- **Somme des écarts** : 0 ✓
- **Propriété** : la somme des écarts à la moyenne est toujours nulle ✓
- **Étendue** : $15 - 9 = 6$ ✓
- **Effet de l'ajout d'une valeur 18** : nouvelle somme 78 ✓
- **Nouvel effectif** : 6 ✓
- **Nouvelle moyenne** : 13 ✓
- **Observation** : ajouter une valeur au-dessus de la moyenne la fait monter ✓

Réponse. $\bar{x} = 12$.

Correction de l'exercice 2 - Avec des décimaux

- **Nombre de valeurs** : 4 ✓
- **Somme, premier terme** : $4,5 + 6,2 = 10,7$ ✓
- **Suite** : $10,7 + 5,8 = 16,5$ ✓
- **Suite** : $16,5 + 3,5 = 20$ ✓
- **Somme totale** : 20 ✓
- **Moyenne** : $\frac{20}{4}$ ✓
- **Résultat** :

$\bar{x} = 5$
- **Contrôle de vraisemblance** : entre 3,5 et 6,2 ✓
- **Astuce de calcul** : regrouper 4,5 et 5,8 puis 6,2 et 3,5 ✓
- **Premier groupe** : 10,3 ✓
- **Second groupe** : 9,7 ✓
- **Somme** : 20 ✓
- **Concordance** ✓
- **Étendue** : $6,2 - 3,5 = 2,7$ ✓
- **Valeurs au-dessus de la moyenne** : 6,2 et 5,8 ✓
- **Valeurs en dessous** : 4,5 et 3,5 ✓
- **Équilibre** : deux de chaque côté ✓
- **Somme des écarts** : $-0,5 + 1,2 + 0,8 - 1,5 = 0$ ✓

Réponse. $\bar{x} = 5$.

Correction de l'exercice 3 - Notes coefficientées

- **Produit français** : $2 \times 12 = 24$ ✓
- **Produit mathématiques** : $3 \times 15 = 45$ ✓
- **Produit histoire** : $1 \times 8 = 8$ ✓
- **Somme des produits** : $24 + 45 + 8$ ✓
- **Total** : 77 ✓
- **Somme des coefficients** : $2 + 3 + 1$ ✓
- **Total** : 6 ✓
- **Moyenne** : $\frac{77}{6}$ ✓
- **Valeur approchée** :

$\approx 12,83$
- **Contrôle de vraisemblance** : entre 8 et 15 ✓

- **Moyenne sans coefficients** : $\frac{35}{3} \approx 11,67$ ✓
- **Comparaison** : la moyenne pondérée est plus élevée ✓
- **Explication** : la meilleure note porte le plus fort coefficient ✓
- **Erreur classique** : diviser par 3 au lieu de 6 ✓
- **Ce que cela donnerait** : $\frac{77}{3} \approx 25,67$ ✓
- **Absurdité** : une note ne dépasse pas 20 ✓
- **Note nécessaire en histoire pour atteindre 13** : $6 \times 13 = 78$ ✓
- **Il faudrait** : $78 - 69 = 9$ ✓

Réponse. $\frac{77}{6} \approx 12,83$.

Correction de l'exercice 4 - Tableau d'effectifs

- **Effectif total** : $5 + 8 + 4 + 3$ ✓
- **Calcul** : 20 élèves ✓
- **Produit pour la valeur 0** : $5 \times 0 = 0$ ✓
- **Produit pour 1** : $8 \times 1 = 8$ ✓
- **Produit pour 2** : $4 \times 2 = 8$ ✓
- **Produit pour 3** : $3 \times 3 = 9$ ✓
- **Somme des produits** : $0 + 8 + 8 + 9$ ✓
- **Total** : 25 ✓
- **Moyenne** : $\frac{25}{20}$ ✓
- **Résultat** :

1,25
- **Interprétation** : en moyenne 1,25 frère ou sœur par élève ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : entre 0 et 3 ✓
- **Erreur classique** : calculer $\frac{0 + 1 + 2 + 3}{4} = 1,5$ ✓
- **Cause** : oublier de pondérer par les effectifs ✓
- **Nombre total de frères et sœurs déclarés** : 25 ✓
- **Proportion d'enfants uniques** : $\frac{5}{20} = 25\%$ ✓
- **Proportion ayant au moins deux** : $\frac{7}{20} = 35\%$ ✓
- **Valeur la plus fréquente** : 1 ✓

Réponse. 20 élèves, moyenne 1,25.

Correction de l'exercice 5 - La valeur manquante

- **Somme visée** : 5×13 ✓
- **Calcul** : 65 ✓
- **Somme des quatre notes** : $11 + 15 = 26$ ✓
- **Suite** : $26 + 12 = 38$ ✓
- **Suite** : $38 + 14 = 52$ ✓
- **Note manquante** : $65 - 52$ ✓
- **Résultat** :

13

- **Vérification de la somme** : $52 + 13 = 65$ ✓
- **Vérification de la moyenne** : $\frac{65}{5} = 13$ ✓
- **Observation** : la moyenne des quatre premières vaut $\frac{52}{4} = 13$ ✓
- **Explication** : ajouter une note égale à la moyenne ne la change pas ✓
- **Note pour atteindre 14** : $5 \times 14 = 70$ ✓
- **Il faudrait** : $70 - 52 = 18$ ✓
- **Note pour atteindre 15** : $75 - 52 = 23$ ✓
- **Verdict** : impossible, la note dépasserait 20 ✓
- **Moyenne maximale atteignable** : $\frac{72}{5} = 14,4$ ✓
- **Moyenne minimale** : $\frac{52}{5} = 10,4$ ✓

Réponse. Il lui faut 13.

Correction de l'exercice 6 - Deux groupes d'effectifs différents

- **Somme du premier groupe** : 12×11 ✓
- **Calcul** : 132 ✓
- **Somme du second groupe** : 18×14 ✓
- **Calcul** : 252 ✓
- **Somme totale** : $132 + 252$ ✓
- **Total** : 384 ✓
- **Effectif total** : $12 + 18 = 30$ ✓
- **Moyenne de l'ensemble** : $\frac{384}{30}$ ✓
- **Résultat** :
12,8
- **Erreur classique** : calculer $\frac{11 + 14}{2} = 12,5$ ✓
- **Pourquoi c'est faux** : les deux groupes n'ont pas le même effectif ✓
- **Écart** : 0,3 point ✓
- **Explication** : le groupe le plus nombreux a la meilleure moyenne ✓
- **Conséquence** : la moyenne globale penche de son côté ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : 12,8 est entre 11 et 14 ✓
- **Et plus proche de 14** ✓
- **Cas où la moyenne simple serait exacte** : deux groupes de 15 ✓
- **Contrôle** : $\frac{165 + 210}{30} = 12,5$ ✓
- **Concordance avec la moyenne simple** ✓

Réponse. 12,8 (et non 12,5).

Correction de l'exercice 7 - L'effet d'une valeur extrême

- a) **Somme** : $8 + 9 + 10 + 11 + 12$ ✓
- **Total** : 50 ✓
- **Moyenne** : $\frac{50}{5}$ ✓
- **Résultat** :

10

b) **Nouvelle somme** : $50 - 12 + 60$ ✓

— **Total** : 98 ✓

— **Nouvelle moyenne** : $\frac{98}{5}$ ✓

— **Résultat** :

19,6

c) **Variation de la moyenne** : $19,6 - 10 = 9,6$ ✓

— **Constat** : elle a presque doublé ✓

— **Cause** : une seule valeur a changé ✓

— **Conclusion** : la moyenne est **très sensible** aux valeurs extrêmes ✓

— **Contrôle du lien** : la valeur a augmenté de 48 ✓

— **Effet sur la moyenne** : $\frac{48}{5} = 9,6$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Position de la nouvelle moyenne** : au-dessus de quatre valeurs sur cinq ✓

— **Conséquence** : elle ne représente plus la série ✓

— **Indicateur plus robuste** : la médiane ✓

— **Médiane avant** : 10 ✓

— **Médiane après** : 10 également ✓

— **Conclusion** : la médiane n'a pas bougé ✓

Réponse. a) 10 · b) 19,6 · c) la moyenne est très sensible aux valeurs extrêmes, la médiane non.

Correction de l'exercice 8 - Transformer toutes les valeurs

a) **Somme initiale** : $10 \times 14 = 140$ ✓

— **Ajout total** : $10 \times 3 = 30$ ✓

— **Nouvelle somme** : 170 ✓

— **Nouvelle moyenne** : $\frac{170}{10}$ ✓

— **Résultat** :

17

— **Règle** : la moyenne augmente de 3 ✓

b) **Nouvelle somme** : $2 \times 140 = 280$ ✓

— **Nouvelle moyenne** : $\frac{280}{10}$ ✓

— **Résultat** :

28

— **Règle** : la moyenne est multipliée par 2 ✓

c) **Après l'ajout** : moyenne 17 ✓

— **Après la multiplication** : 17×2 ✓

— **Résultat** :

34

— **Contrôle par la somme** : $170 \times 2 = 340$ ✓

— **Moyenne** : 34 ✓

— **Concordance** ✓

- **Ordre inverse** : multiplier par 2 puis ajouter 3 ✓
- **Moyenne obtenue** : $28 + 3 = 31$ ✓
- **Comparaison** : $31 \neq 34$ ✓
- **Conclusion** : l'ordre des transformations compte ✓
- **Raison** : l'ajout est lui aussi doublé dans le premier cas ✓

Réponse. a) $17 \cdot$ b) $28 \cdot$ c) 34 .

Correction de l'exercice 9 - Données regroupées en classes

- **Méthode** : on remplace chaque classe par son **centre** ✓
- **Centre de la première classe** : $\frac{0+10}{2} = 5$ ✓
- **Centre de la deuxième** : $\frac{10+20}{2} = 15$ ✓
- **Centre de la troisième** : $\frac{20+30}{2} = 25$ ✓
- **Produit pour la première** : $8 \times 5 = 40$ ✓
- **Produit pour la deuxième** : $12 \times 15 = 180$ ✓
- **Produit pour la troisième** : $10 \times 25 = 250$ ✓
- **Somme des produits** : $40 + 180 + 250$ ✓
- **Total** : 470 ✓
- **Effectif total** : $8 + 12 + 10 = 30$ ✓
- **Moyenne** : $\frac{470}{30}$ ✓
- **Valeur approchée** :

$$\approx 15,7 \text{ minutes}$$
- **Nature du résultat** : c'est une **estimation** ✓
- **Raison** : on ne connaît pas les durées exactes ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : entre 0 et 30 min ✓
- **Classe la plus nombreuse** : $[10; 20[$ ✓
- **Proportion** : $\frac{12}{30} = 40\%$ ✓
- **Proportion d'élèves à moins de 10 min** : $\frac{8}{30} \approx 26,7\%$ ✓
- **Proportion à 20 min ou plus** : $\frac{10}{30} \approx 33,3\%$ ✓

Réponse. Environ 15,7 minutes (estimation par les centres de classes).

Correction de l'exercice 10 - Les températures de la semaine

- a) **Nombre de relevés** : 7 ✓
- **Somme, début** : $7 + 9 = 16$ ✓
 - **Suite** : $16 + 12 = 28$ ✓
 - **Suite** : $28 + 11 = 39$ ✓
 - **Suite** : $39 + 8 = 47$ ✓
 - **Suite** : $47 + 6 = 53$ ✓
 - **Suite** : $53 + 10 = 63$ ✓
 - **Somme totale** : 63 ✓
 - **Moyenne** : $\frac{63}{7}$ ✓
 - **Résultat** :

9 degrés

b) **Températures supérieures à 9** : 12, 11 et 10 ✓

— **Nombre de jours** :

3

— **Températures inférieures** : 7, 8 et 6 ✓

— **Nombre de jours** : 3 ✓

— **Température égale à la moyenne** : 9, un jour ✓

— **Contrôle** : $3 + 3 + 1 = 7$ ✓

— **Étendue** : $12 - 6 = 6$ degrés ✓

— **Médiane** : série triée 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ✓

— **Valeur centrale** : 9 ✓

— **Observation** : moyenne et médiane coïncident ✓

— **Explication** : la série est symétrique ✓

— **Somme des écarts à la moyenne** : 0 ✓

Réponse. a) 9 degrés · b) 3 jours.

Correction de l'exercice 11 - Atteindre une moyenne

a) **Formule** : somme = effectif × moyenne ✓

— **Calcul** : $6 \times 11,5$ ✓

— **Somme actuelle** :

69

b) **Nombre total de devoirs** : 8 ✓

— **Somme visée** : 8×12 ✓

— **Calcul** : 96 ✓

— **Somme manquante** : $96 - 69$ ✓

— **Total à obtenir** : 27 ✓

— **Moyenne sur les deux devoirs** : $\frac{27}{2}$ ✓

— **Résultat** :

13,5

— **Vérification** : $69 + 27 = 96$ ✓

— **Moyenne finale** : $\frac{96}{8} = 12$ ✓

— **Contrôle de faisabilité** : 13,5 est atteignable ✓

— **Exemple de couple de notes** : 13 et 14 ✓

— **Autre exemple** : 12 et 15 ✓

— **Moyenne visée de 13 au lieu de 12** : somme 104 ✓

— **Il faudrait** : 35 sur deux devoirs ✓

— **Moyenne correspondante** : 17,5 ✓

— **Moyenne visée de 14** : $112 - 69 = 43$ ✓

— **Verdict** : impossible, cela dépasse 40 ✓

Réponse. a) 69 · b) 13,5 de moyenne sur les deux derniers.

Correction de l'exercice 12 - Le brevet

- **Somme des produits** : $100 \times 14 + 100 \times 11 + 100 \times 16$ ✓
 - **Premier produit** : 1400 ✓
 - **Deuxième** : 1100 ✓
 - **Troisième** : 1600 ✓
 - **Somme** : 4100 ✓
 - **Somme des coefficients** : 300 ✓
 - **Moyenne** : $\frac{4100}{300}$ ✓
 - **Valeur approchée** :
 $\approx 13,67$
 - **Remarque** : des coefficients tous égaux donnent la moyenne simple ✓
 - **Contrôle** : $\frac{14 + 11 + 16}{3} = \frac{41}{3} \approx 13,67$ ✓
 - **Concordance** ✓
 - **Avec un coefficient 200 sur l'oral** ✓
 - **Nouvelle somme des produits** : $1400 + 1100 + 3200$ ✓
 - **Total** : 5700 ✓
 - **Nouvelle somme des coefficients** : 400 ✓
 - **Nouvelle moyenne** : $\frac{5700}{400}$ ✓
 - **Résultat** :
 $14,25$
 - **Variation** : environ +0,58 point ✓
 - **Explication** : la meilleure note pèse davantage ✓
 - **Effet symétrique** : doubler le coefficient de mathématiques donnerait 13 ✓
- Réponse.** $\approx 13,67$; avec l'oral en coefficient 200, la moyenne monte à 14,25.

Correction de l'exercice 13 - Consommation d'essence

- a) **Consommation sur autoroute** : $3 \times 6,5$ ✓
- **Calcul** : 19,5 L ✓
 - **Consommation en ville** : $1 \times 8,5$ ✓
 - **Calcul** : 8,5 L ✓
 - **Consommation totale** :
 28 litres
- b) **Distance totale** : 400 km ✓
- **Consommation aux 100 km** : $\frac{28}{4}$ ✓
 - **Résultat** :
 7 L/100 km
- c) **Moyenne simple** : $\frac{6,5 + 8,5}{2} = 7,5$ ✓
- **Comparaison** : $7 < 7,5$ ✓
 - **Conclusion** : non ✓
 - **Explication** : l'autoroute représente 75 % du trajet ✓

- **Calcul pondéré** : $0,75 \times 6,5 + 0,25 \times 8,5$ ✓
- **Premier terme** : 4,875 ✓
- **Second terme** : 2,125 ✓
- **Somme** : 7 ✓
- **Concordance avec b)** ✓
- **Cas où la moyenne simple serait exacte** : 200 km de chaque ✓
- **Contrôle** : $13 + 17 = 30$ L pour 400 km ✓
- **Consommation aux 100 km** : 7,5 L ✓
- **Concordance** ✓

Réponse. a) 28 L · b) 7 L aux 100 km · c) non, l'autoroute pèse plus lourd.

Correction de l'exercice 14 - Le panier de courses

a) **Premier lot** : 3×4 ✓

- **Montant** : 12 € ✓
- **Deuxième lot** : 2×9 ✓
- **Montant** : 18 € ✓
- **Troisième lot** : $5 \times 2,4$ ✓
- **Montant** : 12 € ✓
- **Total** : $12 + 18 + 12$ ✓
- **Résultat** :

42 €

b) **Nombre d'articles** : $3 + 2 + 5$ ✓

- **Total** : 10 articles ✓
- **Prix moyen** : $\frac{42}{10}$ ✓
- **Résultat** :

4,20 €

- **Contrôle de vraisemblance** : entre 2,40 € et 9 € ✓
- **Erreur classique** : $\frac{4 + 9 + 2,4}{3} = 5,13$ € ✓
- **Cause** : oublier les quantités ✓
- **Article le plus fréquent** : celui à 2,40 € ✓
- **Sa part du total** : $\frac{12}{42} \approx 28,6\%$ ✓
- **Part des articles à 9 €** : $\frac{18}{42} \approx 42,9\%$ ✓
- **Observation** : deux articles chers pèsent plus que cinq articles bon marché ✓

Réponse. a) 42 € · b) 4,20 € par article.

Correction de l'exercice 15 - Retrouver un effectif

- **Somme des produits** : $4 \times 5 + n \times 8$ ✓
- **Expression** : $20 + 8n$ ✓
- **Effectif total** : $4 + n$ ✓
- **Équation de la moyenne** : $\frac{20 + 8n}{4 + n} = 7$ ✓
- **Produit en croix** : $20 + 8n = 7(4 + n)$ ✓
- **Développement** : $20 + 8n = 28 + 7n$ ✓

- **On retranche** $7n : 20 + n = 28$ ✓
- **Effectif cherché :**
$$n = 8$$
- **Vérification de la somme :** $20 + 64 = 84$ ✓
- **Effectif total :** 12 ✓
- **Moyenne :** $\frac{84}{12} = 7$ ✓
- **Vérification réussie** ✓
- **Contrôle de vraisemblance :** 8 est un entier positif ✓
- **Lecture en parts :** 7 est plus proche de 8 que de 5 ✓
- **Conséquence :** l'effectif de 8 doit être plus grand ✓
- **Rapport des écarts :** $\frac{7-5}{8-7} = 2$ ✓
- **Donc :** $n = 2 \times 4 = 8$ ✓
- **Concordance** ✓

Réponse. $n = 8$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une classe entière

- a) **Somme des effectifs :** $2 + 6 + 10 + 5 + 2$ ✓
- **Effectif total :**
$$25 \text{ élèves}$$
- b) **Produit pour 6 :** 12 ✓
- **Produit pour 9 :** 54 ✓
 - **Produit pour 12 :** 120 ✓
 - **Produit pour 15 :** 75 ✓
 - **Produit pour 18 :** 36 ✓
 - **Somme des produits :** $12 + 54 + 120 + 75 + 36$ ✓
 - **Total :** 297 ✓
 - **Moyenne :** $\frac{297}{25}$ ✓
 - **Résultat :**
$$11,88$$
 - **Contrôle de vraisemblance :** entre 6 et 18 ✓
- c) **Élèves ayant au moins 10 :** ceux à 12, 15 et 18 ✓
- **Effectif :** $10 + 5 + 2$ ✓
 - **Total :** 17 élèves ✓
 - **Proportion :** $\frac{17}{25}$ ✓
 - **En pourcentage :**
$$68 \%$$
 - **Élèves en dessous :** 8, soit 32 % ✓
 - **Contrôle :** $68 + 32 = 100$ ✓
- d) **Règle :** ajouter 1 à toutes les valeurs ajoute 1 à la moyenne ✓
- **Nouvelle moyenne :**
$$12,88$$

- **Contrôle par la somme** : $297 + 25 = 322$ ✓
- **Moyenne** : $\frac{322}{25} = 12,88$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Nouvelle proportion d'élèves à au moins 10** : les 9 deviennent 10 ✓
- **Nouvel effectif** : $17 + 6 = 23$ ✓
- **Proportion** : 92 % ✓

Réponse. a) 25 · b) 11,88 · c) 68 % · d) 12,88.