

Plaquette 4 - Lecture graphique et cas particuliers

Systèmes d'équations — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Une équation, une droite. Toute équation $ax + by = c$ avec $b \neq 0$ se met sous forme réduite :

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Les trois positions relatives.

Position des droites	Nombre de solutions
sécantes	une seule, le point d'intersection
strictement parallèles	aucune
confondues	une infinité

Prévoir sans résoudre. On compare les coefficients directeurs des deux droites :

Comparaison	Conclusion
coefficients directeurs différents	sécantes, une solution
mêmes coefficients directeurs, ordonnées à l'origine différentes	parallèles, aucune solution
tout est identique	confondues, une infinité

Par les coefficients du système, sans passer par la forme réduite :

$$ab' - a'b \neq 0 \quad \text{donne une solution unique}$$

Lire un point sur un graphique. On descend sur l'axe des abscisses, on va sur l'axe des ordonnées, on écrit $(x; y)$ dans cet ordre. Une lecture graphique donne une valeur **approchée** : elle se confirme toujours par le calcul.

Points remarquables d'une droite. Elle coupe l'axe des ordonnées en $x = 0$ et l'axe des abscisses en $y = 0$. Ces deux points suffisent à la tracer.

Correction de l'exercice 1 - Mettre sous forme réduite

a) **On isole y** : $y = 5 - 2x$ ✓

— **Forme réduite** :

$$y = -2x + 5$$

— **Coefficient directeur** : -2 ✓

— **Ordonnée à l'origine** : 5 ✓

— **Contrôle en $x = 0$** : $y = 5$, et $0 + 5 = 5$ ✓

b) **On isole le terme en y** : $-2y = 4 - 3x$ ✓

— **On divise par -2** : $y = \frac{4 - 3x}{-2}$ ✓

— **Simplification** : $y = 1,5x - 2$ ✓

— **Forme réduite** :

$$y = 1,5x - 2$$

- **Coefficient directeur** : 1,5 ✓
- **Contrôle en** $x = 2$: $y = 1$, et $6 - 2 = 4$ ✓

c) **On isole** : $5y = 20 - 4x$ ✓

- **On divise par 5** :

$$y = -0,8x + 4$$

- **Coefficient directeur** : $-0,8$ ✓
- **Ordonnée à l'origine** : 4 ✓
- **Contrôle en** $x = 5$: $y = 0$, et $20 + 0 = 20$ ✓
- **Point d'intersection avec l'axe des abscisses** : $(5; 0)$ ✓
- **Remarque** : la forme réduite existe dès que le coefficient de y est non nul ✓

Réponse. a) $y = -2x + 5$ · b) $y = 1,5x - 2$ · c) $y = -0,8x + 4$.

Correction de l'exercice 2 - Intersection de deux droites

- **Principe** : au point d'intersection, les deux ordonnées sont égales ✓
- **Équation** : $2x - 1 = -x + 5$ ✓
- **On ajoute** x : $3x - 1 = 5$ ✓
- **On ajoute** 1 : $3x = 6$ ✓
- **Abscisse** :

$$x = 2$$

- **Ordonnée par la première droite** : $2 \times 2 - 1$ ✓
- **Résultat** :

$$y = 3$$

- **Contrôle par la seconde droite** : $-2 + 5 = 3$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Point d'intersection** : $(2; 3)$ ✓
- **Coefficients directeurs** : 2 et -1 ✓
- **Comparaison** : ils diffèrent ✓
- **Conclusion** : les droites sont bien sécantes ✓
- **Ordonnées à l'origine** : -1 et 5 ✓
- **Points de la première droite** : $(0; -1)$ et $(2; 3)$ ✓
- **Points de la seconde** : $(0; 5)$ et $(2; 3)$ ✓
- **Contrôle graphique** : les deux tracés se croisent une seule fois ✓
- **Remarque** : deux droites sécantes n'ont jamais plus d'un point commun ✓

Réponse. $(2; 3)$.

Correction de l'exercice 3 - Avec des coefficients décimaux

- **Égalité des ordonnées** : $0,5x + 2 = -x + 8$ ✓
- **On ajoute** x : $1,5x + 2 = 8$ ✓
- **On retranche** 2 : $1,5x = 6$ ✓
- **Abscisse** :

$$x = 4$$

- **Ordonnée par la première droite** : $2 + 2$ ✓

— **Résultat :**

$$y = 4$$

— **Contrôle par la seconde :** $-4 + 8 = 4$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Point d'intersection :** $(4; 4)$ ✓

— **Remarque :** ce point est sur la droite d'équation $y = x$ ✓

— **Voie alternative :** multiplier la première équation par 2 ✓

— **Équation obtenue :** $2y = x + 4$ ✓

— **Système équivalent :** $x - 2y = -4$ et $x + y = 8$ ✓

— **Soustraction :** $-3y = -12$ ✓

— **Résultat :** $y = 4$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Contrôle final dans les deux équations de départ :** $0,5 \times 4 + 2 = 4$ ✓

— **Et :** $-4 + 8 = 4$ ✓

Réponse. $(4; 4)$.

Correction de l'exercice 4 - Prévoir le nombre de solutions

a) **Coefficients directeurs :** 3 et 3 ✓

— **Constat :** ils sont égaux ✓

— **Ordonnées à l'origine :** -2 et 1 ✓

— **Constat :** elles diffèrent ✓

— **Position :** droites strictement parallèles ✓

— **Conclusion :**

aucune solution

b) **Coefficients directeurs :** 3 et -1 ✓

— **Constat :** ils diffèrent ✓

— **Position :** droites sécantes ✓

— **Conclusion :**

une solution unique

— **Calcul de contrôle :** $3x - 2 = -x + 6$ ✓

— **Résolution :** $4x = 8$, donc $x = 2$ et $y = 4$ ✓

c) **Observation :** la première équation est le double de la seconde ✓

— **Contrôle des trois coefficients :** $2 = 2 \times 1$, $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$ ✓

— **Position :** droites confondues ✓

— **Conclusion :**

une infinité de solutions

— **Forme réduite commune :** $y = -0,5x + 1,5$ ✓

— **Exemple de solution :** $(1; 1)$ ✓

— **Vérification :** $2 + 4 = 6$ et $1 + 2 = 3$ ✓

— **Bilan :** les trois cas possibles sont représentés ✓

Réponse. a) aucune · b) une seule, $(2; 4)$ · c) une infinité.

Correction de l'exercice 5 - Trouver un paramètre

- **Condition de parallélisme** : mêmes coefficients directeurs ✓
- **Première droite** : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ ✓
- **Coefficient directeur** : $-\frac{2}{3}$ ✓
- **Seconde droite** : $y = -\frac{4}{m}x + \frac{9}{m}$ ✓
- **Condition** : $\frac{4}{m} = \frac{2}{3}$ ✓
- **Produit en croix** : $12 = 2m$ ✓
- **Valeur cherchée** :

$$m = 6$$
- **Vérification** : la seconde équation devient $4x + 6y = 9$ ✓
- **Rapport des coefficients** : $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$ ✓
- **Rapport des seconds membres** : $\frac{9}{7}$ ✓
- **Constat** : ce rapport diffère de 2 ✓
- **Conclusion** : les droites sont **strictement** parallèles ✓
- **Réponse à la seconde question** : le système n'a **aucune** solution ✓
- **Ordonnée à l'origine de la première** : $\frac{7}{3} \approx 2,33$ ✓
- **Ordonnée à l'origine de la seconde** : $\frac{9}{6} = 1,5$ ✓
- **Constat** : elles diffèrent bien ✓
- **Cas des droites confondues** : il faudrait $4x + 6y = 14$ ✓
- **Contrôle** : $2 \times 7 = 14$ ✓

Réponse. $m = 6$; le système n'a alors aucune solution (droites strictement parallèles).

Correction de l'exercice 6 - Une infinité de solutions

- **Condition** : les deux équations doivent être proportionnelles ✓
- **Rapport des coefficients de x** : $\frac{6}{2} = 3$ ✓
- **Rapport des seconds membres** : $\frac{15}{5} = 3$ ✓
- **Concordance** : le facteur est bien 3 ✓
- **Coefficient de y attendu** : $3 \times (-3)$ ✓
- **Valeur cherchée** :

$$k = -9$$
- **Vérification** : la seconde équation devient $6x - 9y = 15$ ✓
- **Contrôle** : c'est exactement le triple de la première ✓
- **Conclusion** : les droites sont confondues ✓
- **Description des solutions** : tous les couples vérifiant $2x - 3y = 5$ ✓
- **Exemple avec $x = 4$** : $8 - 3y = 5$, donc $y = 1$ ✓
- **Vérification** : $24 - 9 = 15$ ✓
- **Exemple avec $x = 1$** : $2 - 3y = 5$, donc $y = -1$ ✓
- **Vérification** : $6 + 9 = 15$ ✓
- **Et si $k = -9$ mais le second membre valait 16 ?** ✓
- **Conclusion** : les droites seraient parallèles distinctes, donc aucune solution ✓

- **Et pour toute autre valeur de k ?** ✓
- **Conclusion** : droites sécantes, donc une solution unique ✓

Réponse. $k = -9$: la seconde équation est alors le triple de la première.

Correction de l'exercice 7 - Une droite horizontale

- **Première équation** : une droite **horizontale** ✓
- **Description** : tous les points d'ordonnée 4 ✓
- **Seconde équation, forme réduite** : $y = -1,5x + 8,5$ ✓
- **Coefficient directeur** : $-1,5$ ✓
- **Position** : les deux droites sont sécantes ✓
- **Résolution par substitution** : $3x + 8 = 17$ ✓
- **On retranche 8** : $3x = 9$ ✓
- **Abscisse** :
$$x = 3$$
- **Couple solution** : $(3; 4)$ ✓
- **Vérification de la première équation** : $y = 4$ ✓
- **Vérification de la seconde** : $9 + 8 = 17$ ✓
- **Les deux équations sont satisfaites** ✓
- **Lecture graphique** : la droite oblique coupe la hauteur $y = 4$ en $x = 3$ ✓
- **Points utiles pour tracer la seconde** : $(1; 7)$ et $(5; 1)$ ✓
- **Contrôle du premier** : $3 + 14 = 17$ ✓
- **Contrôle du second** : $15 + 2 = 17$ ✓
- **Remarque** : une droite horizontale rencontre toute droite non horizontale ✓
- **Cas sans solution** : si la seconde était $y = 6$ ✓

Réponse. $(3; 4)$.

Correction de l'exercice 8 - Intersection avec les axes

- a) **Intersection avec l'axe des ordonnées** : on pose $x = 0$ ✓
- **Équation** : $4y = 12$ ✓
 - **Ordonnée** : $y = 3$ ✓
 - **Premier point** :
$$(0; 3)$$
 - **Intersection avec l'axe des abscisses** : on pose $y = 0$ ✓
 - **Équation** : $3x = 12$ ✓
 - **Abscisse** : $x = 4$ ✓
 - **Second point** :
$$(4; 0)$$
 - **Contrôle** : $12 + 0 = 12$ ✓
- b) **Test de $(0; 3)$** : $y = 0 - 3 = -3$ ✓
- **Comparaison** : $-3 \neq 3$ ✓
 - **Verdict** : la droite ne passe pas par ce point ✓
 - **Test de $(4; 0)$** : $y = 4 - 3 = 1$ ✓
 - **Comparaison** : $1 \neq 0$ ✓
 - **Verdict** : elle ne passe pas non plus par ce point ✓

- **Conclusion** : la réponse est **non** ✓
- **Point d'intersection réel des deux droites** : $3x + 4(x - 3) = 12$ ✓
- **Développement** : $7x - 12 = 12$ ✓
- **Résolution** : $7x = 24$ ✓
- **Abscisse** : $x = \frac{24}{7} \approx 3,43$ ✓
- **Ordonnée** : $y \approx 0,43$ ✓
- **Contrôle** : $10,29 + 1,71 \approx 12$ ✓

Réponse. a) $(0 ; 3)$ et $(4 ; 0)$ · b) non ; les droites se coupent en $\left(\frac{24}{7} ; \frac{3}{7}\right)$.

Correction de l'exercice 9 - Du graphique au calcul

- **Test du point lu, première droite** : $0,75 \times 3 + 1$ ✓
- **Calcul** : $3,25$ ✓
- **Comparaison avec 2** : les valeurs diffèrent ✓
- **Verdict** : la lecture graphique était imprécise ✓
- **Calcul exact** : $0,75x + 1 = -0,5x + 6$ ✓
- **On ajoute $0,5x$** : $1,25x + 1 = 6$ ✓
- **On retranche 1** : $1,25x = 5$ ✓
- **Abscisse** :
$$x = 4$$
- **Ordonnée par la première droite** : $3 + 1$ ✓
- **Résultat** :
$$y = 4$$
- **Contrôle par la seconde** : $-2 + 6 = 4$ ✓
- **Point d'intersection exact** : $(4 ; 4)$ ✓
- **Écart avec la lecture** : 1 en abscisse, 2 en ordonnée ✓
- **Explication** : un tracé à main levée manque de précision ✓
- **Règle** : la lecture graphique **oriente**, le calcul **conclut** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : le point lu était bien entre les deux ordonnées à l'origine ✓
- **Ordonnées à l'origine** : 1 et 6 ✓

Réponse. Le point exact est $(4 ; 4)$, non $(3 ; 2)$: la lecture graphique était fausse.

Correction de l'exercice 10 - Le triangle formé

- **Premier sommet** : intersection de $y = 2x - 1$ avec l'axe des ordonnées ✓
- **On pose $x = 0$** : $y = -1$ ✓
- **Point** : $(0 ; -1)$ ✓
- **Deuxième sommet** : intersection de $y = -x + 5$ avec l'axe des ordonnées ✓
- **On pose $x = 0$** : $y = 5$ ✓
- **Point** : $(0 ; 5)$ ✓
- **Troisième sommet** : intersection des deux droites ✓
- **Équation** : $2x - 1 = -x + 5$ ✓
- **Résolution** : $3x = 6$, donc $x = 2$ ✓
- **Ordonnée** : $y = 3$ ✓
- **Point** : $(2 ; 3)$ ✓

- **Base du triangle** : le segment porté par l'axe des ordonnées ✓
- **Longueur** : $5 - (-1)$ ✓
- **Base** : 6 ✓
- **Hauteur** : la distance du troisième sommet à l'axe des ordonnées ✓
- **Valeur** : l'abscisse, soit 2 ✓
- **Aire** : $\frac{6 \times 2}{2}$ ✓
- **Résultat** :

6 unités d'aire

- **Contrôle de vraisemblance** : le triangle tient dans un rectangle de 2 sur 6 ✓
- **Aire de ce rectangle** : 12 ✓
- **Rapport** : l'aire du triangle en vaut la moitié ✓

Réponse. 6 unités d'aire (base 6 sur l'axe des ordonnées, hauteur 2).

Correction de l'exercice 11 - Deux forfaits sur un graphique

- **Coût de la location A** : $y = 2t + 5$ ✓
- **Coût de la location B** : $y = 1,25t + 11$ ✓
- **Égalité des coûts** : $2t + 5 = 1,25t + 11$ ✓
- **On retranche** $1,25t$: $0,75t + 5 = 11$ ✓
- **On retranche** 5 : $0,75t = 6$ ✓
- **Durée** :

$t = 8$ heures

- **Coût avec A** : $16 + 5$ ✓
- **Résultat** :

21 €

- **Contrôle avec B** : $10 + 11 = 21$ € ✓
- **Point d'intersection** : (8; 21) ✓
- **Interprétation** : au bout de 8 h, les deux locations coûtent le même prix ✓
- **Avant 8 h** : la droite A est en dessous ✓
- **Contrôle à 4 h** : A donne 13 €, B donne 16 € ✓
- **Conclusion** : la location A est préférable ✓
- **Après 8 h** : la droite B passe en dessous ✓
- **Contrôle à 20 h** : A donne 45 €, B donne 36 € ✓
- **Économie** : 9 € ✓
- **Lecture du coefficient directeur** : B augmente moins vite ✓
- **Écart de pente** : 0,75 € par heure ✓

Réponse. (8; 21) : à partir de 8 h de location, B devient moins chère.

Correction de l'exercice 12 - Reconnaître la position

- a) **Rapport des coefficients de x** : $\frac{6}{2} = 3$ ✓
- **Rapport des coefficients de y** : $\frac{-3}{-1} = 3$ ✓
- **Rapport des seconds membres** : $\frac{9}{3} = 3$ ✓
- **Constat** : les trois rapports coïncident ✓

— **Position :**

droites confondues

b) **Rapport des coefficients de x :** $\frac{2}{1} = 2 \checkmark$

— **Rapport des coefficients de y :** $\frac{4}{2} = 2 \checkmark$

— **Rapport des seconds membres :** $\frac{5}{4} = 1,25 \checkmark$

— **Constat :** le troisième rapport diffère $\checkmark$

— **Position :**

droites strictement parallèles

c) **Rapport des coefficients de x :** $\frac{1}{5} = 0,2 \checkmark$

— **Rapport des coefficients de y :** $\frac{-1}{1} = -1 \checkmark$

— **Constat :** les deux rapports diffèrent $\checkmark$

— **Position :**

droites sécantes

— **Calcul du point d'intersection :** on additionne les deux équations $\checkmark$

— **Résultat :** $6x = 6$, donc $x = 1 \checkmark$

— **Ordonnée :** $y = 1 - 4 = -3 \checkmark$

— **Point :** $(1 ; -3) \checkmark$

— **Vérification de la première équation :** $5 - 3 = 2 \checkmark$

— **Bilan :** les trois positions relatives sont représentées $\checkmark$

Réponse. a) confondues · b) parallèles · c) sécantes en $(1 ; -3)$.

Correction de l'exercice 13 - Deux points, une droite

— **Coefficient directeur :** $\frac{11 - 5}{4 - 1} \checkmark$

— **Calcul :** $\frac{6}{3} = 2 \checkmark$

— **Forme partielle :** $y = 2x + p \checkmark$

— **On utilise le point A :** $5 = 2 + p \checkmark$

— **Ordonnée à l'origine :** $p = 3 \checkmark$

— **Équation réduite :**

$$y = 2x + 3$$

— **Contrôle avec B :** $8 + 3 = 11 \checkmark$

— **Recherche de l'intersection :** $2x + 3 = -2x + 20 \checkmark$

— **On ajoute $2x$:** $4x + 3 = 20 \checkmark$

— **On retranche 3 :** $4x = 17 \checkmark$

— **Abscisse :**

$$x = 4,25$$

— **Ordonnée :** $2 \times 4,25 + 3 \checkmark$

— **Résultat :**

$$y = 11,5$$

— **Contrôle par la seconde droite :** $-8,5 + 20 = 11,5 \checkmark$

— **Concordance $\checkmark$**

- **Point d'intersection** : (4,25 ; 11,5) ✓
- **Coefficients directeurs** : 2 et -2 ✓
- **Constat** : ils diffèrent, les droites sont bien sécantes ✓

Réponse. $y = 2x + 3$; intersection en (4,25 ; 11,5).

Correction de l'exercice 14 - Un système à paramètre

a) **On additionne les deux équations** : $3x = 6 + a$ ✓

— **Abscisse** :

$$x = \frac{6+a}{3}$$

— **Report dans la première équation** : $y = 6 - x$ ✓

— **Calcul** : $y = 6 - \frac{6+a}{3}$ ✓

— **Mise au même dénominateur** : $y = \frac{18-6-a}{3}$ ✓

— **Ordonnée** :

$$y = \frac{12-a}{3}$$

— **Contrôle avec** $a = 0$: $x = 2$ et $y = 4$ ✓

— **Vérification** : $2 + 4 = 6$ et $4 - 4 = 0$ ✓

— **Contrôle avec** $a = 3$: $x = 3$ et $y = 3$ ✓

— **Vérification** : $6 - 3 = 3$ ✓

b) **Condition** : $\frac{6+a}{3} = 4$ ✓

— **On multiplie par 3** : $6 + a = 12$ ✓

— **Valeur cherchée** :

$$a = 6$$

— **Ordonnée correspondante** : $\frac{12-6}{3} = 2$ ✓

— **Couple solution** : (4 ; 2) ✓

— **Vérification de la première équation** : $4 + 2 = 6$ ✓

— **Vérification de la seconde** : $8 - 2 = 6$ ✓

— **Les deux équations sont satisfaites** ✓

— **Remarque** : le système a toujours une solution unique ✓

— **Raison** : les coefficients directeurs -1 et 2 diffèrent toujours ✓

Réponse. a) $x = \frac{6+a}{3}$ et $y = \frac{12-a}{3}$ · b) $a = 6$, solution (4 ; 2).

Correction de l'exercice 15 - Trois droites concourantes

— **Intersection des deux premières** : $x + 1 = -2x + 7$ ✓

— **Résolution** : $3x = 6$, donc $x = 2$ ✓

— **Ordonnée** : $2 + 1 = 3$ ✓

— **Point** : (2 ; 3) ✓

— **Contrôle par la deuxième droite** : $-4 + 7 = 3$ ✓

— **Test sur la troisième droite** : $3 \times 2 - 3$ ✓

— **Calcul** : 3 ✓

— **Comparaison** : l'ordonnée obtenue vaut bien 3 ✓

— **Conclusion :**

oui, elles sont concourantes en $(2; 3)$

— **Intersection des première et troisième :** $x + 1 = 3x - 3$ ✓

— **Résolution :** $4 = 2x$, donc $x = 2$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Intersection des deuxième et troisième :** $-2x + 7 = 3x - 3$ ✓

— **Résolution :** $10 = 5x$, donc $x = 2$ ✓

— **Concordance** ✓

— **Bilan :** les trois intersections deux à deux donnent le même point ✓

— **Contre-exemple utile :** remplacer la troisième par $y = 3x - 2$ ✓

— **Test en $x = 2$:** $4 \neq 3$ ✓

— **Conclusion :** les trois droites formeraient alors un triangle ✓

Réponse. Oui : les trois droites passent par $(2; 3)$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : lecture et calcul

a) **On isole le terme en y :** $-3y = -6 - 2x$ ✓

— **On divise par -3 :**

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

— **Coefficient directeur :** $\frac{2}{3}$ ✓

— **Contrôle en $x = 3$:** $y = 4$, et $6 - 12 = -6$ ✓

b) **Égalité des ordonnées :** $-x + 7 = \frac{2}{3}x + 2$ ✓

— **On multiplie tout par 3 :** $-3x + 21 = 2x + 6$ ✓

— **On ajoute $3x$:** $21 = 5x + 6$ ✓

— **On retranche 6 :** $15 = 5x$ ✓

— **Abscisse :**

$$x = 3$$

— **Ordonnée :** $-3 + 7 = 4$ ✓

— **Point d'intersection :**

$$(3; 4)$$

— **Contrôle avec d_2 :** $6 - 12 = -6$ ✓

c) **Pour d_1 :** on pose $x = 0$ ✓

— **Ordonnée :** 7 ✓

— **Point :** $(0; 7)$ ✓

— **Pour d_2 :** on pose $x = 0$ ✓

— **Ordonnée :** 2 ✓

— **Point :** $(0; 2)$ ✓

— **Contrôle :** $0 - 6 = -6$ ✓

d) **Base :** le segment de l'axe des ordonnées ✓

— **Longueur :** $7 - 2$ ✓

— **Base :** 5 ✓

— **Hauteur :** l'abscisse du point d'intersection ✓

- **Valeur** : 3 ✓
- **Aire** : $\frac{5 \times 3}{2}$ ✓
- **Résultat** :

7,5 unités d'aire

- **Contrôle de vraisemblance** : le triangle tient dans un rectangle de 3 sur 5 ✓
- **Aire du rectangle** : 15 ✓
- **Rapport** : la moitié ✓

Réponse. a) $y = \frac{2}{3}x + 2$ · b) (3 ; 4) · c) (0 ; 7) et (0 ; 2) · d) 7,5 unités d'aire.