

Plaquette 3 – La méthode par combinaison linéaire

Systèmes d'équations – Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le principe. Si deux égalités sont vraies, leur somme l'est aussi. On s'arrange donc pour que les coefficients d'une inconnue soient **opposés**, puis on additionne.

Situation	Ce qu'on fait
coefficients déjà opposés (+3y et -3y)	on additionne
coefficients déjà égaux (+2x et +2x)	on soustrait
coefficients multiples (y et 3y)	on multiplie une équation
aucun lien simple	on multiplie les deux équations

Trouver par quoi multiplier. Pour éliminer x entre $2x + \dots$ et $3x + \dots$, on multiplie la première par 3 et la seconde par 2 : les deux coefficients deviennent 6. On soustrait alors les équations.

Multiplier une équation, c'est multiplier TOUS ses termes, second membre compris. C'est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Les trois issues possibles.

Équation finale	Conclusion
$ax = b$ avec $a \neq 0$	un unique couple
$0 = 5$ (faux)	aucune solution
$0 = 0$	une infinité de couples

Repérer les cas particuliers d'avance. On compare les rapports des coefficients :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c} \quad \text{donne aucune solution}$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \quad \text{donne une infinité}$$

Après l'élimination. On remplace la valeur trouvée dans **l'une des équations de départ**, jamais dans une équation transformée : une erreur de multiplication se propagerait.

Correction de l'exercice 1 – Somme et différence

- **Observation** : les coefficients de y sont opposés ✓
- **On additionne les deux équations** : $(x + y) + (x - y) = 10 + 4$ ✓
- **Membre de gauche** : $2x$ ✓
- **Équation obtenue** : $2x = 14$ ✓
- **Première inconnue** :

$$x = 7$$
- **Report dans la première équation** : $7 + y = 10$ ✓
- **Seconde inconnue** :

$$y = 3$$

- **Couple solution** : $(7; 3)$ ✓
- **Vérification de la première équation** : $7 + 3 = 10$ ✓
- **Vérification de la seconde** : $7 - 3 = 4$ ✓
- **Les deux équations sont satisfaites** ✓
- **Voie symétrique** : soustraire les équations ✓
- **Membre de gauche** : $2y$ ✓
- **Équation** : $2y = 6$, donc $y = 3$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Règle à retenir** : somme et différence connues donnent la demi-somme et la demi-différence ✓
- **Contrôle** : $\frac{10+4}{2} = 7$ et $\frac{10-4}{2} = 3$ ✓

Réponse. $(7; 3)$.

Correction de l'exercice 2 - Coefficients égaux

- **Observation** : les coefficients de x sont **égaux** ✓
- **Stratégie** : soustraire les deux équations ✓
- **Soustraction** : $(2x + 3y) - (2x - y) = 16 - 4$ ✓
- **Membre de gauche** : $3y + y = 4y$ ✓
- **Attention au signe** : $-(-y) = +y$ ✓
- **Équation obtenue** : $4y = 12$ ✓
- **Première inconnue** :

$$y = 3$$

- **Report dans la seconde équation** : $2x - 3 = 4$ ✓
- **Résolution** : $2x = 7$ ✓
- **Seconde inconnue** :

$$x = 3,5$$

- **Couple solution** : $(3,5; 3)$ ✓
- **Vérification de la première équation** : $7 + 9 = 16$ ✓
- **Vérification de la seconde** : $7 - 3 = 4$ ✓
- **Les deux équations sont satisfaites** ✓
- **Remarque** : une solution décimale est tout à fait acceptable ✓
- **Voie alternative** : multiplier la seconde par -1 puis additionner ✓
- **Équation obtenue** : $-2x + y = -4$ ✓
- **Somme** : $4y = 12$, identique ✓

Réponse. $(3,5; 3)$.

Correction de l'exercice 3 - Coefficients opposés

- **Observation** : les coefficients de y sont opposés ✓
- **On additionne** : $(3x + 2y) + (5x - 2y) = 18 + 14$ ✓
- **Membre de gauche** : $8x$ ✓
- **Membre de droite** : 32 ✓
- **Première inconnue** :

$$x = 4$$

— **Report dans la première équation** : $12 + 2y = 18$ ✓

— **Résolution** : $2y = 6$ ✓

— **Seconde inconnue** :

$$y = 3$$

— **Couple solution** : $(4; 3)$ ✓

— **Vérification de la première équation** : $12 + 6 = 18$ ✓

— **Vérification de la seconde** : $20 - 6 = 14$ ✓

— **Les deux équations sont satisfaites** ✓

— **Contrôle par l'autre équation** : $5 \times 4 - 2 \times 3 = 14$ ✓

— **Avantage de la méthode** : aucune fraction n'est apparue ✓

— **Comparaison** : par substitution, il aurait fallu écrire $y = \frac{18 - 3x}{2}$ ✓

— **Conclusion** : ici la combinaison est nettement plus rapide ✓

Réponse. $(4; 3)$.

Correction de l'exercice 4 - Multiplier une équation

— **Objectif** : éliminer x ✓

— **Constat** : les coefficients sont 1 et 2 ✓

— **Stratégie** : multiplier la première équation par 2 ✓

— **Multipliation de tous les termes** : $2x + 6y = 26$ ✓

— **Contrôle** : le second membre a bien été multiplié ✓

— **Soustraction avec la seconde** : $(2x + 6y) - (2x - y) = 26 - 5$ ✓

— **Membre de gauche** : $7y$ ✓

— **Équation** : $7y = 21$ ✓

— **Première inconnue** :

$$y = 3$$

— **Report dans la première équation de départ** : $x + 9 = 13$ ✓

— **Seconde inconnue** :

$$x = 4$$

— **Couple solution** : $(4; 3)$ ✓

— **Vérification de la première équation** : $4 + 9 = 13$ ✓

— **Vérification de la seconde** : $8 - 3 = 5$ ✓

— **Les deux équations sont satisfaites** ✓

— **Erreur classique** : écrire $2x + 6y = 13$ ✓

— **Conséquence** : on trouverait $7y = 8$, donc une valeur fausse ✓

Réponse. $(4; 3)$.

Correction de l'exercice 5 - Multiplier les deux équations

— **Objectif** : éliminer y ✓

— **Coefficients** : 3 et -2 ✓

— **Plus petit commun multiple** : 6 ✓

— **On multiplie la première par 2** : $4x + 6y = 32$ ✓

— **On multiplie la seconde par 3** : $9x - 6y = 33$ ✓

— **Coefficients de y** : $+6$ et -6 , opposés ✓

— **On additionne** : $13x = 65$ ✓

— **Première inconnue** :

$$x = 5$$

— **Report dans la première équation de départ** : $10 + 3y = 16$ ✓

— **Résolution** : $3y = 6$ ✓

— **Seconde inconnue** :

$$y = 2$$

— **Couple solution** : $(5; 2)$ ✓

— **Vérification de la première équation** : $10 + 6 = 16$ ✓

— **Vérification de la seconde** : $15 - 4 = 11$ ✓

— **Les deux équations sont satisfaites** ✓

— **Voie alternative** : éliminer x ✓

— **Multiplications** : la première par 3, la seconde par 2 ✓

— **Équations** : $6x + 9y = 48$ et $6x - 4y = 22$ ✓

— **Soustraction** : $13y = 26$, donc $y = 2$ ✓

— **Concordance** ✓

Réponse. $(5; 2)$.

Correction de l'exercice 6 - Un second membre nul

— **Objectif** : éliminer y ✓

— **Coefficients** : 4 et -2 ✓

— **Stratégie** : multiplier la seconde par 2 ✓

— **Équation obtenue** : $6x - 4y = 0$ ✓

— **Contrôle** : $2 \times 0 = 0$, le second membre reste nul ✓

— **On additionne** : $11x = 22$ ✓

— **Première inconnue** :

$$x = 2$$

— **Report dans la seconde équation** : $6 - 2y = 0$ ✓

— **Résolution** : $2y = 6$ ✓

— **Seconde inconnue** :

$$y = 3$$

— **Couple solution** : $(2; 3)$ ✓

— **Vérification de la première équation** : $10 + 12 = 22$ ✓

— **Vérification de la seconde** : $6 - 6 = 0$ ✓

— **Les deux équations sont satisfaites** ✓

— **Lecture de la seconde équation** : $3x = 2y$ ✓

— **Interprétation** : les deux inconnues sont proportionnelles ✓

— **Contrôle** : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = 1$ ✓

— **Remarque** : tous les couples $(2k; 3k)$ vérifient la seconde équation ✓

Réponse. $(2; 3)$.

Correction de l'exercice 7 - Deux multiplications

— **Objectif** : éliminer x ✓

- **Coefficients** : 4 et 6 ✓
- **Plus petit commun multiple** : 12 ✓
- **On multiplie la première par 3** : $12x - 9y = 18$ ✓
- **On multiplie la seconde par 2** : $12x + 10y = 56$ ✓
- **Coefficients de x** : égaux ✓
- **On soustrait** : $(12x + 10y) - (12x - 9y) = 56 - 18$ ✓
- **Membre de gauche** : $19y$ ✓
- **Équation** : $19y = 38$ ✓
- **Première inconnue** :

$$y = 2$$

- **Report dans la première équation de départ** : $4x - 6 = 6$ ✓
- **Résolution** : $4x = 12$ ✓
- **Seconde inconnue** :

$$x = 3$$

- **Couple solution** : $(3; 2)$ ✓
- **Vérification de la première équation** : $12 - 6 = 6$ ✓
- **Vérification de la seconde** : $18 + 10 = 28$ ✓
- **Les deux équations sont satisfaites** ✓
- **Contrôle des multiplications** : $3 \times 6 = 18$ et $2 \times 28 = 56$ ✓

Réponse. $(3; 2)$.

Correction de l'exercice 8 - Coefficients identiques sur y

- **Observation** : les coefficients de y sont **égaux** ✓
- **Stratégie** : soustraire les deux équations ✓
- **Soustraction** : $(-2x + 5y) - (3x + 5y) = 1 - 11$ ✓
- **Membre de gauche** : $-5x$ ✓
- **Membre de droite** : -10 ✓
- **Première inconnue** :

$$x = 2$$

- **Report dans la seconde équation** : $6 + 5y = 11$ ✓
- **Résolution** : $5y = 5$ ✓
- **Seconde inconnue** :

$$y = 1$$

- **Couple solution** : $(2; 1)$ ✓
- **Vérification de la première équation** : $-4 + 5 = 1$ ✓
- **Vérification de la seconde** : $6 + 5 = 11$ ✓
- **Les deux équations sont satisfaites** ✓
- **Erreur fréquente** : additionner au lieu de soustraire ✓
- **Ce que cela donnerait** : $x + 10y = 12$, une équation à deux inconnues ✓
- **Conséquence** : aucune inconnue éliminée, on n'a pas avancé ✓
- **Règle** : coefficients **égaux** demandent une soustraction ✓

Réponse. $(2; 1)$.

Correction de l'exercice 9 - Repérer un système sans solution

- **Observation préalable** : $4 = 2 \times 2$ et $6 = 2 \times 3$ ✓
- **Rapport des seconds membres** : $\frac{10}{7}$ ✓
- **Constat** : ce rapport diffère de 2 ✓
- **Prévision** : le système n'aura pas de solution ✓
- **Vérification par le calcul** : on multiplie la première par 2 ✓
- **Équation obtenue** : $4x + 6y = 14$ ✓
- **Soustraction avec la seconde** : $0 = 4$ ✓
- **Constat** : égalité fausse ✓
- **Conclusion** :
aucune solution
- **Interprétation graphique** : deux droites **parallèles** distinctes ✓
- **Coefficient directeur commun** : $-\frac{2}{3}$ ✓
- **Contrôle avec la première équation** : $y = \frac{7-2x}{3}$ ✓
- **Contrôle avec la seconde** : $y = \frac{10-4x}{6} = \frac{5-2x}{3}$ ✓
- **Comparaison** : même pente, ordonnées à l'origine différentes ✓
- **Première ordonnée à l'origine** : $\frac{7}{3}$ ✓
- **Seconde** : $\frac{5}{3}$ ✓
- **Conclusion** : les droites ne se coupent jamais ✓

Réponse. Aucune solution : $4x + 6y$ vaudrait à la fois 14 et 10.

Correction de l'exercice 10 - Repérer une infinité de solutions

- **Observation** : la seconde équation est le **double** de la première ✓
- **Contrôle des trois coefficients** : $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $14 = 2 \times 7$ ✓
- **Prévision** : une infinité de solutions ✓
- **Vérification par le calcul** : on multiplie la première par 2 ✓
- **Équation obtenue** : $4x + 6y = 14$ ✓
- **Soustraction avec la seconde** : $0 = 0$ ✓
- **Constat** : égalité toujours vraie ✓
- **Conclusion** : une **infinité** de couples solutions ✓
- **Description** : tous les couples vérifiant $2x + 3y = 7$ ✓
- **Expression** :
$$y = \frac{7-2x}{3}$$
- **Exemple avec** $x = 2$: $y = 1$ ✓
- **Vérification** : $4 + 3 = 7$ et $8 + 6 = 14$ ✓
- **Exemple avec** $x = -1$: $y = 3$ ✓
- **Vérification** : $-2 + 9 = 7$ et $-4 + 18 = 14$ ✓
- **Exemple avec** $x = 5$: $y = -1$ ✓
- **Vérification** : $10 - 3 = 7$ ✓
- **Interprétation graphique** : les deux équations décrivent la **même** droite ✓
- **Comparaison avec l'exercice précédent** : seul le second membre change ✓

Réponse. Une infinité : tous les couples vérifiant $2x + 3y = 7$.

Correction de l'exercice 11 - Choisir la meilleure méthode

a) **Méthode conseillée** : la substitution ✓

- **Raison** : y est déjà isolée ✓
- **Substitution** : $2x + (4x - 3) = 9$ ✓
- **Réduction** : $6x - 3 = 9$, donc $6x = 12$ ✓
- **Première inconnue** : $x = 2$ ✓
- **Retour** : $y = 8 - 3 = 5$ ✓
- **Couple solution** :

$$(2; 5)$$

- **Vérification** : $4 + 5 = 9$ ✓

b) **Méthode conseillée** : la combinaison ✓

- **Raison** : aucun coefficient ne vaut 1 ✓
- **Objectif** : éliminer y ✓
- **Coefficients** : -2 et 4 ✓
- **Stratégie** : multiplier la première par 2 ✓
- **Équation obtenue** : $14x - 4y = 34$ ✓
- **On additionne avec la seconde** : $17x = 51$ ✓
- **Première inconnue** : $x = 3$ ✓
- **Report dans la seconde équation** : $9 + 4y = 17$ ✓
- **Résolution** : $4y = 8$ ✓
- **Couple solution** :

$$(3; 2)$$

- **Vérification de la première équation** : $21 - 4 = 17$ ✓
- **Vérification de la seconde** : $9 + 8 = 17$ ✓
- **Ce qui décide du choix** : la présence ou non d'un coefficient égal à 1 ✓

Réponse. a) substitution, $(2; 5)$ · b) combinaison, $(3; 2)$.

Correction de l'exercice 12 - Les entrées du spectacle

- **Inconnues** : p les billets pleins, r les billets réduits ✓
- **Première équation** : $p + r = 150$ ✓
- **Seconde équation** : $12p + 8r = 1560$ ✓
- **Stratégie** : multiplier la première par 8 ✓
- **Équation obtenue** : $8p + 8r = 1200$ ✓
- **Soustraction** : $(12p + 8r) - (8p + 8r) = 1560 - 1200$ ✓
- **Membre de gauche** : $4p$ ✓
- **Équation** : $4p = 360$ ✓
- **Billets plein tarif** :

$$p = 90$$

- **Billets tarif réduit** : $150 - 90$ ✓
- **Résultat** :

$$r = 60$$

- **Vérification du nombre total** : $90 + 60 = 150$ ✓
- **Recette du plein tarif** : $90 \times 12 = 1080$ € ✓
- **Recette du tarif réduit** : $60 \times 8 = 480$ € ✓
- **Recette totale** : $1080 + 480 = 1560$ € ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : deux effectifs entiers et positifs ✓
- **Recette moyenne par billet** : $\frac{1560}{150} = 10,40$ € ✓

Réponse. 90 billets plein tarif et 60 à tarif réduit.

Correction de l'exercice 13 - Le mélange de cafés

- **Inconnues** : x la masse de café à 12 €, y celle à 18 € ✓
- **Première équation** : $x + y = 50$ ✓
- **Valeur totale du mélange** : $50 \times 14,4$ ✓
- **Calcul** : 720 € ✓
- **Seconde équation** : $12x + 18y = 720$ ✓
- **Simplification par 6** : $2x + 3y = 120$ ✓
- **Stratégie** : multiplier la première par 2 ✓
- **Équation obtenue** : $2x + 2y = 100$ ✓
- **Soustraction** : $y = 20$ ✓
- **Masse de café à 18 €** :
20 kg
- **Masse de café à 12 €** : $50 - 20$ ✓
- **Résultat** :
30 kg
- **Vérification de la masse totale** : $30 + 20 = 50$ kg ✓
- **Valeur du premier café** : $30 \times 12 = 360$ € ✓
- **Valeur du second** : $20 \times 18 = 360$ € ✓
- **Valeur totale** : 720 € ✓
- **Prix au kilo** : $\frac{720}{50} = 14,40$ € ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Remarque** : le prix moyen est plus proche de 12 que de 18 ✓
- **Explication** : le café bon marché est majoritaire ✓

Réponse. 30 kg à 12 € et 20 kg à 18 €.

Correction de l'exercice 14 - Le bateau et le courant

- **Inconnues** : v la vitesse propre, c celle du courant, en km/h ✓
- **Vitesse dans le sens du courant** : $\frac{36}{2}$ ✓
- **Calcul** : 18 km/h ✓
- **Première équation** : $v + c = 18$ ✓
- **Vitesse à contre-courant** : $\frac{36}{3}$ ✓
- **Calcul** : 12 km/h ✓
- **Seconde équation** : $v - c = 12$ ✓
- **On additionne** : $2v = 30$ ✓

— **Vitesse propre :**

$$v = 15 \text{ km/h}$$

— **On soustrait :** $2c = 6$ ✓

— **Vitesse du courant :**

$$c = 3 \text{ km/h}$$

— **Vérification dans le sens du courant :** $15 + 3 = 18 \text{ km/h}$ ✓

— **Durée :** $\frac{36}{18} = 2 \text{ h}$ ✓

— **Vérification à contre-courant :** $15 - 3 = 12 \text{ km/h}$ ✓

— **Durée :** $\frac{36}{12} = 3 \text{ h}$ ✓

— **Les deux conditions sont remplies** ✓

— **Durée sans courant :** $\frac{36}{15} = 2,4 \text{ h}$ ✓

— **Soit :** 2 h 24 min ✓

— **Remarque :** l'aller-retour prend 5 h, plus que $2 \times 2,4 = 4,8 \text{ h}$ ✓

— **Explication :** le temps perdu à contre-courant n'est pas compensé ✓

Réponse. Vitesse propre 15 km/h, courant 3 km/h.

Correction de l'exercice 15 - Deux fournisseurs

— **Inconnues :** p le prix d'une planche, t celui d'un tasseau ✓

— **Première équation :** $3p + 5t = 61$ ✓

— **Seconde équation :** $5p + 2t = 70$ ✓

— **Objectif :** éliminer t ✓

— **Coefficients :** 5 et 2 ✓

— **Plus petit commun multiple :** 10 ✓

— **On multiplie la première par 2 :** $6p + 10t = 122$ ✓

— **On multiplie la seconde par 5 :** $25p + 10t = 350$ ✓

— **On soustrait :** $19p = 228$ ✓

— **Prix d'une planche :**

$$p = 12 \text{ €}$$

— **Report dans la première équation :** $36 + 5t = 61$ ✓

— **Résolution :** $5t = 25$ ✓

— **Prix d'un tasseau :**

$$t = 5 \text{ €}$$

— **Vérification de la première commande :** $36 + 25 = 61 \text{ €}$ ✓

— **Vérification de la seconde :** $60 + 10 = 70 \text{ €}$ ✓

— **Les deux conditions sont remplies** ✓

— **Contrôle de vraisemblance :** les deux prix sont positifs ✓

— **Coût d'une planche et d'un tasseau :** 17 € ✓

— **Coût de 10 planches et 10 tasseaux :** 170 € ✓

— **Contrôle des multiplications :** $2 \times 61 = 122$ et $5 \times 70 = 350$ ✓

Réponse. Planche 12 €, tasseau 5 €.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : quatre systèmes

a) **Coefficients de y : opposés** ✓

— **On additionne** : $2x = 8$ ✓

— **Première inconnue** : $x = 4$ ✓

— **Report** : $4 + 2y = 8$, donc $y = 2$ ✓

— **Couple** :

$(4; 2)$

— **Vérification** : $4 - 4 = 0$ ✓

b) **Coefficients de y : opposés** ✓

— **On additionne** : $5x = 25$ ✓

— **Première inconnue** : $x = 5$ ✓

— **Report dans la seconde** : $10 - 4y = 0$, donc $y = 2,5$ ✓

— **Couple** :

$(5; 2,5)$

— **Vérification de la première** : $15 + 10 = 25$ ✓

c) **Objectif** : éliminer y ✓

— **On multiplie la première par 2** : $10x + 4y = 48$ ✓

— **On soustrait la seconde** : $7x = 28$ ✓

— **Première inconnue** : $x = 4$ ✓

— **Report dans la première de départ** : $20 + 2y = 24$ ✓

— **Résolution** : $y = 2$ ✓

— **Couple** :

$(4; 2)$

— **Vérification de la seconde** : $12 + 8 = 20$ ✓

d) **Observation** : la seconde équation est le triple de la première ✓

— **Contrôle** : $3 \times 1 = 3$, $3 \times 1 = 3$, $3 \times 6 = 18$ ✓

— **Conclusion** :

une infinité de solutions

— **Description** : tous les couples vérifiant $x + y = 6$ ✓

— **Exemple** : $(1; 5)$ ✓

— **Vérification** : $3 + 15 = 18$ ✓

— **Autre exemple** : $(0; 6)$ ✓

— **Vérification** : $0 + 18 = 18$ ✓

— **Bilan** : trois systèmes à solution unique, un à une infinité ✓

Réponse. a) $(4; 2)$ · b) $(5; 2,5)$ · c) $(4; 2)$ · d) une infinité (tous les $x + y = 6$).