

Plaquette 5 – Mettre un problème en système

Systèmes d'équations — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Reconnaître qu'il faut un système. Deux quantités cherchées, deux renseignements indépendants : c'est la signature.

Type d'énoncé	Les deux équations
achats de deux articles	une par commande
effectifs et recette	une sur les nombres, une sur les montants
mélange de deux produits	une sur les masses, une sur les valeurs
aller-retour avec courant ou vent	une par sens de parcours
rectangle	une sur le périmètre, une sur la relation entre les côtés

Nommer les inconnues avec leur unité. « Soit x le nombre de billets plein tarif » vaut mieux que « soit x le plein tarif », qui ne dit pas si c'est un prix ou un effectif.

Traduire les tournures.

Énoncé	Écriture
a et b ont pour somme S	$a + b = S$
a dépasse b de d	$a - b = d$
a est le triple de b	$a = 3b$
n objets à p € et m objets à q €	$np + mq = \text{total}$

Choisir la méthode.

Système	Méthode
une inconnue de coefficient 1	substitution
coefficients opposés ou égaux	combinaison directe
aucun des deux	combinaison après multiplication

Conclure dans le contexte. Une phrase avec les unités, et un contrôle de vraisemblance : effectifs entiers, prix et longueurs positifs.

Correction de l'exercice 1 – Somme et différence

- **Inconnues** : x le plus grand, y le plus petit ✓
- **Première équation** : $x + y = 58$ ✓
- **Seconde équation** : $x - y = 14$ ✓
- **Méthode** : combinaison directe, les coefficients de y sont opposés ✓
- **On additionne** : $2x = 72$ ✓
- **Premier nombre** :

$x = 36$
- **On soustrait** : $2y = 44$ ✓

— **Second nombre :**

$$y = 22$$

- **Vérification de la somme :** $36 + 22 = 58$ ✓
- **Vérification de la différence :** $36 - 22 = 14$ ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Règle générale :** le plus grand vaut la demi-somme plus la demi-différence ✓
- **Contrôle :** $\frac{58}{2} + \frac{14}{2} = 29 + 7 = 36$ ✓
- **Le plus petit :** $29 - 7 = 22$ ✓
- **Concordance** ✓
- **Produit des deux nombres :** $36 \times 22 = 792$ ✓
- **Remarque :** somme et différence de même parité garantissent des entiers ✓

Réponse. 36 et 22.

Correction de l'exercice 2 - Les pièces de la tirelire

- **Inconnues :** x le nombre de pièces de 0,50 €, y celui de pièces de 2 € ✓
- **Première équation :** $x + y = 30$ ✓
- **Seconde équation :** $0,5x + 2y = 33$ ✓
- **Méthode :** substitution, le coefficient de x vaut 1 ✓
- **Isolation :** $y = 30 - x$ ✓
- **Substitution :** $0,5x + 2(30 - x) = 33$ ✓
- **Développement :** $0,5x + 60 - 2x = 33$ ✓
- **Réduction :** $60 - 1,5x = 33$ ✓
- **On retranche 60 :** $-1,5x = -27$ ✓
- **Pièces de 0,50 € :**

$$x = 18$$

- **Pièces de 2 € :** $30 - 18$ ✓
- **Résultat :**

$$y = 12$$

- **Vérification du nombre total :** $18 + 12 = 30$ ✓
- **Valeur des petites pièces :** $18 \times 0,5 = 9$ € ✓
- **Valeur des grosses :** $12 \times 2 = 24$ € ✓
- **Total :** $9 + 24 = 33$ € ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Contrôle de vraisemblance :** deux effectifs entiers et positifs ✓
- **Valeur moyenne d'une pièce :** $\frac{33}{30} = 1,10$ € ✓

Réponse. 18 pièces de 0,50 € et 12 pièces de 2 €.

Correction de l'exercice 3 - À la boulangerie

- **Inconnues :** c le prix d'un croissant, p celui d'un pain au chocolat ✓
- **Première équation :** $4c + 3p = 8,10$ ✓
- **Seconde équation :** $2c + 5p = 8,60$ ✓
- **Méthode :** combinaison, aucun coefficient ne vaut 1 ✓
- **Objectif :** éliminer c ✓

- **On multiplie la seconde par 2** : $4c + 10p = 17,20$ ✓
- **Contrôle** : le second membre a bien été doublé ✓
- **On soustrait la première** : $7p = 9,10$ ✓
- **Prix d'un pain au chocolat** :

$$p = 1,30 \text{ €}$$

- **Report dans la première équation** : $4c + 3,90 = 8,10$ ✓
- **Résolution** : $4c = 4,20$ ✓
- **Prix d'un croissant** :

$$c = 1,05 \text{ €}$$

- **Vérification de la première commande** : $4,20 + 3,90 = 8,10 \text{ €}$ ✓
- **Vérification de la seconde** : $2,10 + 6,50 = 8,60 \text{ €}$ ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : deux prix positifs et plausibles ✓
- **Coût d'un croissant et d'un pain** : $2,35 \text{ €}$ ✓
- **Écart de prix** : $0,25 \text{ €}$ ✓

Réponse. Croissant 1,05 €, pain au chocolat 1,30 €.

Correction de l'exercice 4 - Le rectangle

- **Inconnues** : L la longueur, ℓ la largeur, en centimètres ✓
- **Première équation** : $2(L + \ell) = 54$ ✓
- **Simplification** : $L + \ell = 27$ ✓
- **Seconde équation** : $L = 2\ell$ ✓
- **Méthode** : substitution ✓
- **Substitution** : $2\ell + \ell = 27$ ✓
- **Réduction** : $3\ell = 27$ ✓
- **Largeur** :

$$\ell = 9 \text{ cm}$$

- **Longueur** : 2×9 ✓
- **Résultat** :

$$L = 18 \text{ cm}$$

- **Vérification du périmètre** : $2 \times 27 = 54 \text{ cm}$ ✓
- **Vérification du rapport** : $18 = 2 \times 9$ ✓
- **Aire** : 18×9 ✓
- **Résultat** :

$$162 \text{ cm}^2$$

- **Contrôle de vraisemblance** : les deux dimensions sont positives ✓
- **Lecture en parts** : le demi-périmètre se partage en 3 parts ✓
- **Valeur d'une part** : 9 cm ✓
- **Comparaison avec un carré de même périmètre** : côté $13,5 \text{ cm}$ ✓
- **Aire du carré** : $182,25 \text{ cm}^2$ ✓
- **Conclusion** : le carré a une aire plus grande ✓

Réponse. Largeur 9 cm, longueur 18 cm, aire 162 cm^2 .

Correction de l'exercice 5 - La mère et sa fille

- **Inconnues** : m l'âge de la mère, f celui de la fille ✓
- **Première équation** : $m + f = 50$ ✓
- **Âges il y a 5 ans** : $m - 5$ et $f - 5$ ✓
- **Seconde équation** : $m - 5 = 3(f - 5)$ ✓
- **Développement** : $m - 5 = 3f - 15$ ✓
- **Réécriture** : $m = 3f - 10$ ✓
- **Substitution dans la première** : $3f - 10 + f = 50$ ✓
- **Réduction** : $4f = 60$ ✓
- **Âge de la fille** :

$$f = 15 \text{ ans}$$

- **Âge de la mère** : $50 - 15$ ✓
- **Résultat** :

$$m = 35 \text{ ans}$$

- **Vérification de la somme** : $35 + 15 = 50$ ✓
- **Âges il y a 5 ans** : 30 et 10 ✓
- **Vérification du rapport** : $30 = 3 \times 10$ ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : la mère avait 20 ans à la naissance ✓
- **Écart d'âge** : 20 ans, constant ✓
- **Quand le rapport sera-t-il 2 ?** $m + t = 2(f + t)$ ✓
- **Résolution** : $35 + t = 30 + 2t$, donc $t = 5$ ✓
- **Contrôle** : dans 5 ans, 40 et 20 ✓

Réponse. La mère 35 ans, la fille 15 ans.

Correction de l'exercice 6 - L'avion et le vent

- **Inconnues** : v la vitesse propre, w celle du vent, en km/h ✓
- **Vitesse à l'aller** : $\frac{1200}{2}$ ✓
- **Calcul** : 600 km/h ✓
- **Première équation** : $v + w = 600$ ✓
- **Durée du retour en heures** : 2,5 ✓
- **Vitesse au retour** : $\frac{1200}{2,5}$ ✓
- **Calcul** : 480 km/h ✓
- **Seconde équation** : $v - w = 480$ ✓
- **On additionne** : $2v = 1080$ ✓
- **Vitesse propre** :

$$v = 540 \text{ km/h}$$

- **On soustrait** : $2w = 120$ ✓
- **Vitesse du vent** :

$$w = 60 \text{ km/h}$$

- **Vérification à l'aller** : $540 + 60 = 600 \text{ km/h}$ ✓
- **Durée** : $\frac{1200}{600} = 2 \text{ h}$ ✓

- **Vérification au retour** : $540 - 60 = 480 \text{ km/h}$ ✓
- **Durée** : $\frac{1200}{480} = 2,5 \text{ h}$ ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Durée sans vent** : $\frac{1200}{540} \approx 2,22 \text{ h}$ ✓
- **Aller-retour réel** : $4,5 \text{ h}$ ✓
- **Aller-retour sans vent** : $\approx 4,44 \text{ h}$ ✓
- **Conclusion** : le vent fait perdre du temps au total ✓

Réponse. Vitesse propre 540 km/h, vent 60 km/h.

Correction de l'exercice 7 - Deux angles

- **Inconnues** : x le plus grand angle, y le plus petit, en degrés ✓
- **Rappel** : deux angles supplémentaires ont une somme de 180° ✓
- **Première équation** : $x + y = 180$ ✓
- **Seconde équation** : $x - y = 24$ ✓
- **On additionne** : $2x = 204$ ✓
- **Plus grand angle** :

$$x = 102^\circ$$
- **On soustrait** : $2y = 156$ ✓
- **Plus petit angle** :

$$y = 78^\circ$$
- **Vérification de la somme** : $102 + 78 = 180$ ✓
- **Vérification de l'écart** : $102 - 78 = 24$ ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Nature des angles** : l'un est obtus, l'autre aigu ✓
- **Contrôle** : $102 > 90$ et $78 < 90$ ✓
- **Variante avec des angles complémentaires** : somme de 90° ✓
- **Système** : $x + y = 90$ et $x - y = 24$ ✓
- **Résolution** : $2x = 114$, donc $x = 57$ et $y = 33$ ✓
- **Contrôle** : $57 + 33 = 90$ et $57 - 33 = 24$ ✓
- **Remarque** : les deux angles y sont alors aigus ✓

Réponse. 102° et 78° .

Correction de l'exercice 8 - La tombola

- **Inconnues** : x le nombre de billets à 2 €, y celui à 5 € ✓
- **Première équation** : $x + y = 420$ ✓
- **Seconde équation** : $2x + 5y = 1290$ ✓
- **Méthode** : combinaison ✓
- **On multiplie la première par 2** : $2x + 2y = 840$ ✓
- **On soustrait de la seconde** : $3y = 450$ ✓
- **Billets à 5 €** :

$$y = 150$$
- **Billets à 2 €** : $420 - 150$ ✓
- **Résultat** :

$$x = 270$$

- **Vérification du nombre total** : $270 + 150 = 420$ ✓
- **Recette des billets à 2 €** : 540 € ✓
- **Recette des billets à 5 €** : 750 € ✓
- **Recette totale** : $540 + 750 = 1290$ € ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : deux effectifs entiers et positifs ✓
- **Prix moyen d'un billet** : $\frac{1290}{420} \approx 3,07$ € ✓
- **Cohérence** : ce prix est bien compris entre 2 et 5 € ✓
- **Proportion de billets à 2 €** : $\frac{270}{420} \approx 64,3\%$ ✓

Réponse. 270 billets à 2 € et 150 billets à 5 €.

Correction de l'exercice 9 - Deux classes

- **Inconnues** : a l'effectif de la première classe, b celui de la seconde ✓
- **Première équation** : $a + b = 54$ ✓
- **Effectifs après le transfert** : $a - 5$ et $b + 5$ ✓
- **Seconde équation** : $a - 5 = b + 5$ ✓
- **Réécriture** : $a - b = 10$ ✓
- **On additionne les deux équations** : $2a = 64$ ✓
- **Première classe** :

$$a = 32 \text{ élèves}$$

- **Seconde classe** : $54 - 32$ ✓
- **Résultat** :

$$b = 22 \text{ élèves}$$

- **Vérification du total** : $32 + 22 = 54$ ✓
- **Effectifs après transfert** : 27 et 27 ✓
- **Vérification de l'égalité** ✓
- **Contrôle** : le total reste 54 ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : deux effectifs entiers et positifs ✓
- **Écart initial** : 10 élèves ✓
- **Explication** : transférer 5 élèves réduit l'écart de 10 ✓
- **Règle** : un transfert modifie l'écart du **double** du nombre transféré ✓

Réponse. 32 et 22 élèves.

Correction de l'exercice 10 - Un nombre à deux chiffres

- **Inconnues** : d le chiffre des dizaines, u celui des unités ✓
- **Écriture du nombre** : $10d + u$ ✓
- **Nombre obtenu après échange** : $10u + d$ ✓
- **Première équation** : $d + u = 11$ ✓
- **Seconde équation** : $(10d + u) - (10u + d) = 27$ ✓
- **Développement** : $10d + u - 10u - d$ ✓
- **Réduction** : $9d - 9u = 27$ ✓

- **Simplification par 9** : $d - u = 3$ ✓
- **On additionne les deux équations** : $2d = 14$ ✓
- **Chiffre des dizaines** :

$$d = 7$$
- **Chiffre des unités** : $11 - 7$ ✓
- **Résultat** :

$$u = 4$$
- **Nombre cherché** : 74 ✓
- **Vérification de la somme des chiffres** : $7 + 4 = 11$ ✓
- **Nombre échangé** : 47 ✓
- **Vérification de l'écart** : $74 - 47 = 27$ ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : deux chiffres entre 0 et 9 ✓
- **Remarque** : l'écart est toujours un multiple de 9 ✓
- **Raison** : il vaut $9(d - u)$ ✓

Réponse. 74 (échangé : 47, écart 27).

Correction de l'exercice 11 - Deux machines

- **Inconnues** : x la production de la première, y celle de la seconde, en pièces par heure ✓
- **Première équation** : $x + y = 480$ ✓
- **Seconde équation** : $x - y = 40$ ✓
- **On additionne** : $2x = 520$ ✓
- **Première machine** :

$$x = 260 \text{ pièces/h}$$
- **On soustrait** : $2y = 440$ ✓
- **Seconde machine** :

$$y = 220 \text{ pièces/h}$$
- **Vérification du total** : $260 + 220 = 480$ ✓
- **Vérification de l'écart** : $260 - 220 = 40$ ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Production en une journée de 7 h** : 480×7 ✓
- **Résultat** : 3360 pièces ✓
- **Part de la première machine** : $260 \times 7 = 1820$ ✓
- **Part de la seconde** : $220 \times 7 = 1540$ ✓
- **Contrôle** : $1820 + 1540 = 3360$ ✓
- **Durée pour produire 2400 pièces** : $\frac{2400}{480} = 5 \text{ h}$ ✓
- **Proportion de la première** : $\frac{260}{480} \approx 54,2 \%$ ✓
- **Contrôle de vraisemblance** : deux productions positives ✓

Réponse. 260 et 220 pièces par heure.

Correction de l'exercice 12 - Deux locations de vélo

- **Inconnues** : t la durée en heures, c le coût commun en euros ✓
- **Première équation** : $c = 2t + 5$ ✓
- **Seconde équation** : $c = 1,25t + 11$ ✓
- **Égalité des coûts** : $2t + 5 = 1,25t + 11$ ✓
- **On retranche 1,25t** : $0,75t + 5 = 11$ ✓
- **On retranche 5** : $0,75t = 6$ ✓
- **Durée** :

$$t = 8 \text{ heures}$$

- **Coût avec A** : $16 + 5$ ✓
- **Coût commun** :

$$21 \text{ €}$$

- **Contrôle avec B** : $10 + 11 = 21 \text{ €}$ ✓
- **Les deux formules coïncident** ✓
- **Pour 12 heures, avec A** : $24 + 5 = 29 \text{ €}$ ✓
- **Pour 12 heures, avec B** : $15 + 11 = 26 \text{ €}$ ✓
- **Comparaison** : B est moins chère ✓
- **Économie** : 3 € ✓
- **Explication** : au-delà de 8 h, le tarif horaire de B l'emporte ✓
- **Écart de tarif horaire** : $0,75 \text{ €}$ ✓
- **Contrôle** : $0,75 \times (12 - 8) = 3 \text{ €}$ ✓
- **Concordance avec l'économie calculée** ✓

Réponse. Même coût à 8 h (21 €) ; pour 12 h, choisir B (26 € contre 29 €).

Correction de l'exercice 13 - Le rectangle agrandi

- **Inconnues** : L la longueur, ℓ la largeur, en centimètres ✓
- **Première équation** : $2(L + \ell) = 30$ ✓
- **Simplification** : $L + \ell = 15$ ✓
- **Aire initiale** : $L\ell$ ✓
- **Nouvelle aire** : $(L + 3)(\ell + 2)$ ✓
- **Développement** : $L\ell + 2L + 3\ell + 6$ ✓
- **Augmentation de l'aire** : $2L + 3\ell + 6$ ✓
- **Seconde équation** : $2L + 3\ell + 6 = 43$ ✓
- **Simplification** : $2L + 3\ell = 37$ ✓
- **Substitution** : $\ell = 15 - L$ ✓
- **Report** : $2L + 3(15 - L) = 37$ ✓
- **Développement** : $2L + 45 - 3L = 37$ ✓
- **Réduction** : $-L = -8$ ✓
- **Longueur** :

$$L = 8 \text{ cm}$$

- **Largeur** : $15 - 8$ ✓
- **Résultat** :

$$\ell = 7 \text{ cm}$$

- **Vérification du périmètre** : $2 \times 15 = 30 \text{ cm}$ ✓

- **Aire initiale** : $8 \times 7 = 56 \text{ cm}^2$ ✓
- **Nouvelles dimensions** : 11 cm sur 9 cm ✓
- **Nouvelle aire** : 99 cm^2 ✓
- **Augmentation** : $99 - 56 = 43 \text{ cm}^2$ ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓

Réponse. Longueur 8 cm, largeur 7 cm.

Correction de l'exercice 14 - Un mélange de graines

- **Inconnues** : x la masse à 3 €, y la masse à 7 €, en kilos ✓
- **Première équation** : $x + y = 80$ ✓
- **Valeur totale du mélange** : $80 \times 4,5$ ✓
- **Calcul** : 360 € ✓
- **Seconde équation** : $3x + 7y = 360$ ✓
- **Méthode** : combinaison ✓
- **On multiplie la première par 3** : $3x + 3y = 240$ ✓
- **On soustrait de la seconde** : $4y = 120$ ✓
- **Masse de graines à 7 €** :

$$y = 30 \text{ kg}$$

- **Masse de graines à 3 €** : $80 - 30$ ✓
- **Résultat** :

$$x = 50 \text{ kg}$$

- **Vérification de la masse totale** : $50 + 30 = 80 \text{ kg}$ ✓
- **Valeur du premier lot** : $50 \times 3 = 150 \text{ €}$ ✓
- **Valeur du second** : $30 \times 7 = 210 \text{ €}$ ✓
- **Valeur totale** : $150 + 210 = 360 \text{ €}$ ✓
- **Prix au kilo** : $\frac{360}{80} = 4,50 \text{ €}$ ✓
- **Les deux conditions sont remplies** ✓
- **Cohérence** : le prix moyen est entre 3 et 7 € ✓
- **Proportion de graines bon marché** : $\frac{50}{80} = 62,5 \%$ ✓
- **Remarque** : le prix moyen penche vers le produit majoritaire ✓

Réponse. 50 kg à 3 € et 30 kg à 7 €.

Correction de l'exercice 15 - Le parcours en deux étapes

- **Inconnues** : p la durée sur le plat, m celle en montée, en heures ✓
- **Première équation** : $p + m = 6$ ✓
- **Distance sur le plat** : $5p$ ✓
- **Distance en montée** : $3m$ ✓
- **Seconde équation** : $5p + 3m = 23$ ✓
- **Méthode** : substitution ✓
- **Isolation** : $m = 6 - p$ ✓
- **Substitution** : $5p + 3(6 - p) = 23$ ✓
- **Développement** : $5p + 18 - 3p = 23$ ✓
- **Réduction** : $2p + 18 = 23$ ✓

— **On retranche 18** : $2p = 5$ ✓

— **Durée sur le plat** :

$$p = 2,5 \text{ h}$$

— **Durée en montée** : $6 - 2,5$ ✓

— **Résultat** :

$$m = 3,5 \text{ h}$$

— **Vérification de la durée totale** : $2,5 + 3,5 = 6 \text{ h}$ ✓

— **Distance sur le plat** : $5 \times 2,5 = 12,5 \text{ km}$ ✓

— **Distance en montée** : $3 \times 3,5 = 10,5 \text{ km}$ ✓

— **Distance totale** : $12,5 + 10,5 = 23 \text{ km}$ ✓

— **Les deux conditions sont remplies** ✓

— **Vitesse moyenne** : $\frac{23}{6} \approx 3,83 \text{ km/h}$ ✓

— **Cohérence** : elle est bien comprise entre 3 et 5 km/h ✓

Réponse. 2 h 30 sur le plat et 3 h 30 en montée.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : l'atelier de menuiserie

a) **Inconnues** : a le prix d'un tabouret, t celui d'une table ✓

— **Première équation** : $a + t = 190$ ✓

— **Seconde équation** : $3a + 2t = 430$ ✓

— **Méthode** : substitution ✓

— **Isolation** : $t = 190 - a$ ✓

— **Substitution** : $3a + 2(190 - a) = 430$ ✓

— **Développement** : $3a + 380 - 2a = 430$ ✓

— **Réduction** : $a + 380 = 430$ ✓

— **Prix d'un tabouret** :

$$a = 50 \text{ €}$$

— **Prix d'une table** : $190 - 50$ ✓

— **Résultat** :

$$t = 140 \text{ €}$$

— **Vérification de la première commande** : $50 + 140 = 190 \text{ €}$ ✓

— **Vérification de la seconde** : $150 + 280 = 430 \text{ €}$ ✓

b) **Coût des tabourets** : $5 \times 50 = 250 \text{ €}$ ✓

— **Coût des tables** : $4 \times 140 = 560 \text{ €}$ ✓

— **Total** :

$$810 \text{ €}$$

— **Contrôle de l'ordre de grandeur** : 9 meubles pour 810 € ✓

— **Prix moyen** : 90 € ✓

c) **Coût d'un lot tabouret plus table** : 190 € ✓

— **Inconnue** : n , le nombre de lots ✓

— **Condition** : $190n \leq 1000$ ✓

— **Quotient** : $\frac{1000}{190} \approx 5,26$ ✓

— **Contrainte** : n est un entier ✓

— **Conclusion :**

$$n = 5$$

— **Achat :** 5 tabourets et 5 tables ✓

— **Contrôle à 6 lots :** 1140 € ✓

— **Verdict :** le budget serait dépassé ✓

d) **Montant dépensé :** 5×190 ✓

— **Résultat :**

$$950 \text{ €}$$

— **Contrôle par le détail :** $250 + 700$ ✓

— **Coût des tabourets :** 250 € ✓

— **Coût des tables :** 700 € ✓

— **Total :** 950 € ✓

— **Reste disponible :** $1000 - 950 = 50$ € ✓

— **Remarque :** il reste exactement de quoi acheter un tabouret de plus ✓

— **Mais :** l'égalité des quantités ne serait plus respectée ✓

Réponse. a) tabouret 50 €, table 140 € · b) 810 € · c) 5 de chaque · d) 950 €.