

Plaque 1 - Substitution, combinaison et problèmes

Systèmes d'équations — Troisième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthodes du cours.

- Un système s'écrit

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Résoudre, c'est trouver **tous** les couples $(x; y)$ qui vérifient les deux égalités en même temps.

- **Substitution** : on isole une inconnue dans l'une des équations (la plus simple), puis on la remplace dans l'autre.
- **Combinaison** : on multiplie une ou les deux équations pour que les coefficients d'une inconnue soient opposés, puis on additionne les deux équations.
- On termine toujours par une **vérification** dans les deux équations initiales.
- Interprétation graphique : chaque équation est une droite. Une solution unique = droites sécantes ; aucune solution = droites strictement parallèles ; une infinité = droites confondues.
- Mise en équation : une inconnue par grandeur cherchée, une équation par information de l'énoncé.

Correction de l'exercice 1 - Vérifier un couple solution

Il faut tester le couple dans les **deux** équations.

- Première équation : $2 \times 3 + (-2) = 6 - 2 = 4$. Vérifiée.
- Seconde équation : $3 - 3 \times (-2) = 3 + 6 = 9$. Vérifiée.
- Les deux égalités étant vraies, $(3; -2)$ **est** solution du système.

Piège. Un couple qui ne vérifie qu'une équation n'est pas solution du système.

Réponse. Oui, $(3; -2)$ est solution.

Correction de l'exercice 2 - Résolution par substitution

La première équation donne déjà y en fonction de x : on remplace dans la seconde.

- $3x + (2x - 1) = 14$, soit $5x - 1 = 14$.
- Donc $5x = 15$ et $x = 3$.
- On revient à la première équation : $y = 2 \times 3 - 1 = 5$.
- Vérification : $3 \times 3 + 5 = 14$. Correct.
- Solution : le couple $(3; 5)$.

Réponse. $(x; y) = (3; 5)$.

Correction de l'exercice 3 - Substitution avec une isolation

On isole l'inconnue dont le coefficient vaut 1 : ici x dans la première équation.

- $x = 11 - 2y$.

- On remplace dans la seconde : $3(11 - 2y) - y = 5$, soit $33 - 6y - y = 5$.
- Donc $33 - 7y = 5$, puis $-7y = -28$ et $y = 4$.
- Alors $x = 11 - 2 \times 4 = 3$.
- Vérification : $3 + 2 \times 4 = 11$ et $3 \times 3 - 4 = 5$. Les deux équations sont vérifiées.

Réponse. $(x; y) = (3; 4)$.

Correction de l'exercice 4 - Résolution par combinaison

Les coefficients de x sont identiques : on **soustrait** les deux équations pour éliminer x .

- En soustrayant la seconde de la première : $(2x + 3y) - (2x - y) = 19 - 3$, soit $4y = 16$.
- Donc $y = 4$.
- On remplace dans la seconde équation : $2x - 4 = 3$, donc $2x = 7$ et $x = 3,5$.
- Vérification : $2 \times 3,5 + 3 \times 4 = 7 + 12 = 19$. Correct.

Réponse. $(x; y) = (3,5; 4)$.

Correction de l'exercice 5 - Combinaison avec multiplication

Aucun coefficient ne se simplifie directement : on multiplie pour rendre ceux de y opposés.

- On multiplie la première par 3 : $9x + 6y = 48$.
- On multiplie la seconde par 2 : $10x - 6y = 10$.
- On additionne : les termes en y s'éliminent, $19x = 58$, donc $x = \frac{58}{19} \approx 3,05$.
- Puis $3 \times \frac{58}{19} + 2y = 16$, soit $\frac{174}{19} + 2y = \frac{304}{19}$, donc $2y = \frac{130}{19}$ et $y = \frac{65}{19} \approx 3,42$.
- Vérification : $5 \times \frac{58}{19} - 3 \times \frac{65}{19} = \frac{290 - 195}{19} = \frac{95}{19} = 5$. Correct.
- Solution : $\left(\frac{58}{19}; \frac{65}{19}\right)$. Un système à coefficients entiers n'a pas forcément une solution entière.

Réponse. $\left(\frac{58}{19}; \frac{65}{19}\right) \approx (3,05; 3,42)$.

Correction de l'exercice 6 - Un système sans solution

- On multiplie la première équation par 2 : $4x + 2y = 10$.
- La seconde équation affirme que $4x + 2y = 3$.
- Il faudrait donc que $10 = 3$, ce qui est impossible : le système n'a **aucune solution**.
- Interprétation graphique : les deux équations donnent $y = -2x + 5$ et $y = -2x + 1,5$. Les droites ont le même coefficient directeur -2 mais des ordonnées à l'origine différentes : elles sont **strictement parallèles**, donc sans point commun.

Réponse. Aucune solution (droites parallèles).

Correction de l'exercice 7 - Problème : deux tarifs de cinéma

- Soit x le prix d'une place adulte et y celui d'une place enfant, en euros.
- Traduction de l'énoncé :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 37 \\ 2x + 5y = 43 \end{cases}$$

- On élimine x : première $\times 2$ donne $6x + 4y = 74$; seconde $\times 3$ donne $6x + 15y = 129$.
- On soustrait : $11y = 55$, donc $y = 5$.

- On remplace dans la première : $3x + 10 = 37$, donc $3x = 27$ et $x = 9$.
- Vérification : $3 \times 9 + 2 \times 5 = 37$ et $2 \times 9 + 5 \times 5 = 18 + 25 = 43$. Correct.
- **Conclusion : une place adulte coûte 9 € et une place enfant 5 €.**

Réponse. Adulte 9 €, enfant 5 €.

Correction de l'exercice 8 - Problème : pièces de monnaie

- Soit x le nombre de pièces de 2 € et y celui de pièces de 0,50 €.
- Nombre de pièces : $x + y = 30$. Valeur totale (en euros) : $2x + 0,5y = 39$.

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 2x + 0,5y = 39 \end{cases}$$
- Substitution : $y = 30 - x$, donc $2x + 0,5(30 - x) = 39$.
- On développe : $2x + 15 - 0,5x = 39$, soit $1,5x = 24$ et $x = 16$.
- Alors $y = 30 - 16 = 14$.
- Vérification : $16 + 14 = 30$ pièces et $16 \times 2 + 14 \times 0,5 = 32 + 7 = 39$ €. Correct.
- **Conclusion : 16 pièces de 2 € et 14 pièces de 50 centimes.**

Réponse. 16 pièces de 2 € et 14 pièces de 0,50 €.

Correction de l'exercice 9 - Problème : mélange de deux cafés

- Soit x la masse (en kg) de café à 12 € et y celle de café à 20 €.
- Masse totale : $x + y = 10$.
- Valeur totale : $12x + 20y = 10 \times 15 = 150$.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 12x + 20y = 150 \end{cases}$$
- Substitution : $y = 10 - x$, donc $12x + 20(10 - x) = 150$.
- On développe : $12x + 200 - 20x = 150$, soit $-8x = -50$ et $x = 6,25$.
- Alors $y = 10 - 6,25 = 3,75$.
- Vérification : $12 \times 6,25 + 20 \times 3,75 = 75 + 75 = 150$ €. Correct.
- **Conclusion : 6,25 kg de café à 12 €/kg et 3,75 kg de café à 20 €/kg.**

Réponse. 6,25 kg à 12 €/kg et 3,75 kg à 20 €/kg.

Correction de l'exercice 10 - Interprétation graphique

- a) Les deux expressions de y doivent être égales :
- $2x - 3 = -x + 6$, donc $3x = 9$ et $x = 3$.
 - Puis $y = 2 \times 3 - 3 = 3$.
 - Vérification dans la seconde : $-3 + 6 = 3$. Correct.
- b) Chaque équation est celle d'une droite : la première a pour coefficient directeur 2, la seconde -1 .
- Les coefficients directeurs étant différents, les droites sont **sécantes**, et leur point d'intersection a pour coordonnées $(3; 3)$: c'est exactement la solution du système.

Réponse. a) $(3; 3)$ · b) c'est le point d'intersection des deux droites.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : un problème d'atelier

- Soit t le nombre de tables et c le nombre de chaises.
- Heures : $4t + c = 38$. Planches : $3t + 2c = 36$.

$$\begin{cases} 4t + c = 38 \\ 3t + 2c = 36 \end{cases}$$

- La première équation a un coefficient égal à 1 pour c : on isole $c = 38 - 4t$.
- On remplace dans la seconde : $3t + 2(38 - 4t) = 36$, soit $3t + 76 - 8t = 36$.
- Donc $-5t = -40$ et $t = 8$.
- Puis $c = 38 - 4 \times 8 = 6$.
- Vérification : $4 \times 8 + 6 = 38$ heures et $3 \times 8 + 2 \times 6 = 24 + 12 = 36$ planches. Correct.
- **Conclusion : l'atelier a fabriqué 8 tables et 6 chaises.**

Réflexe à garder. Dans un problème concret, on contrôle que la solution a un sens : un nombre d'objets doit être entier et positif.

Réponse. 8 tables et 6 chaises.